

ETUDE DE FONCTIONNELLES GÉOMÉTRIQUES DÉPENDANT DE LA COURBURE PAR DES MÉTHODES D'OPTIMISATION DE FORMES

Applications aux fonctionnelles de Willmore et Canham-Helfrich

JÉRÉMY DALPHIN (*Institut Elie Cartan de Lorraine, Nancy*)
en collaboration avec ANTOINE HENROT et TAKÉO TAKAHASHI



JOURNÉES DES JEUNES EDPistes Français



Mardi 31 mars 2015

Introduction : optimisation de formes et géométrie

Dans la nature, la modélisation de nombreux phénomènes physiques s'effectue sous forme d'une minimisation d'énergie :

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}} \mathcal{E}(\Omega)$$



Introduction : optimisation de formes et géométrie

Dans la nature, la modélisation de nombreux phénomènes physiques s'effectue sous forme d'une minimisation d'énergie :

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}} \mathcal{E}(\Omega)$$



- $\mathcal{E} : \Omega \mapsto \mathcal{E}(\Omega)$ représente le critère à minimiser, c'est une fonctionnelle de forme dépendant de la géométrie de l'objet ;
- $\mathcal{A}$ est la classe des formes admissibles ;
- $\mathcal{C}$ désigne l'ensemble des contraintes à satisfaire.

Introduction : optimisation de formes et géométrie

Dans la nature, la modélisation de nombreux phénomènes physiques s'effectue sous forme d'une minimisation d'énergie :

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}} \mathcal{E}(\Omega)$$



- $\mathcal{E} : \Omega \mapsto \mathcal{E}(\Omega)$ représente le critère à minimiser, c'est une fonctionnelle de forme dépendant de la géométrie de l'objet ;
- $\mathcal{A}$ est la classe des formes admissibles ;
- $\mathcal{C}$ désigne l'ensemble des contraintes à satisfaire.

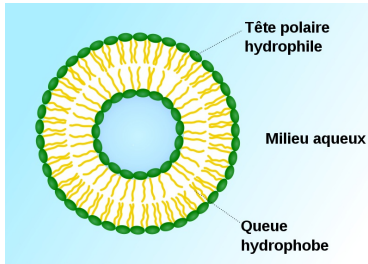
Beaucoup d'applications : *problèmes isopérimétriques/de valeurs propres, surfaces minimales, segmentation d'images, détection de défauts/fissures, renforcement/isolation des structures, mélange de matériaux, aéronautique, ...*

Etude et analyse de vésicules par l'optimisation de formes

Motivation de départ : la modélisation des vésicules en biologie.

- Qu'est-ce qu'une vésicule ?

⇒ *C'est un assemblage de phospholipides en milieu aqueux.*

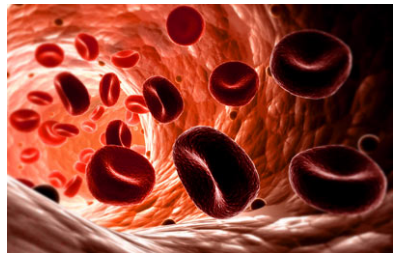
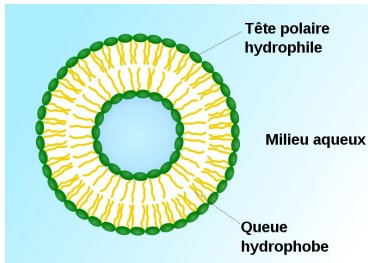


Etude et analyse de vésicules par l'optimisation de formes

Motivation de départ : la modélisation des vésicules en biologie.

- Qu'est-ce qu'une vésicule ?

⇒ *C'est un assemblage de phospholipides en milieu aqueux.*



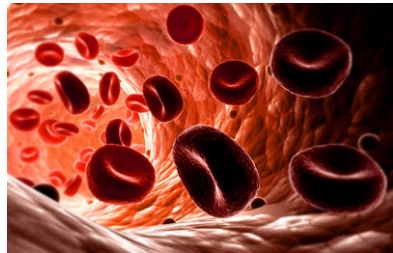
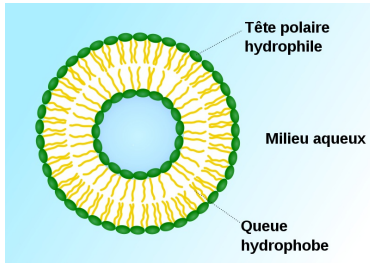
Un exemple de vésicule : le globule rouge chez les mammifères.

Etude et analyse de vésicules par l'optimisation de formes

Motivation de départ : la modélisation des vésicules en biologie.

- Qu'est-ce qu'une vésicule ?

⇒ *C'est un assemblage de phospholipides en milieu aqueux.*

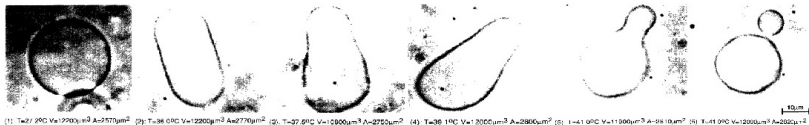


Un exemple de vésicule : le globule rouge chez les mammifères.

- C'est la membrane de base à toutes les cellules du vivant.
- Le globule rouge = une vésicule + un squelette de protéines.

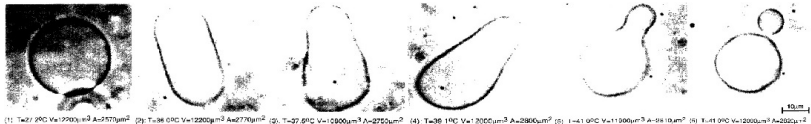
Etude et analyse de vésicules par l'optimisation de formes

- On s'intéresse aux formes que peuvent prendre les vésicules.

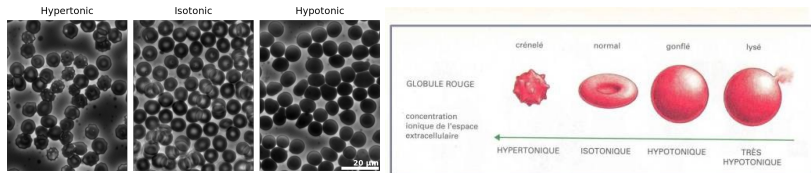


Etude et analyse de vésicules par l'optimisation de formes

- On s'intéresse aux formes que peuvent prendre les vésicules.



- Prise en compte des effets du squelette chez les globules rouges.



Etude et analyse de vésicules par l'optimisation de formes

Le point de vue : leur forme est la solution d'un problème d'optimisation

$$\exists \Omega^* \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}, \quad \mathcal{E}(\Omega^*) = \min_{\Omega \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}} \mathcal{E}(\Omega).$$

La problématique : a-t-on l'existence d'une solution optimale ?

Etude et analyse de vésicules par l'optimisation de formes

Le point de vue : leur forme est la solution d'un problème d'optimisation

$$\exists \Omega^* \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}, \quad \mathcal{E}(\Omega^*) = \min_{\Omega \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}} \mathcal{E}(\Omega).$$

La problématique : a-t-on l'existence d'une solution optimale ?

- Quelle type d'énergie élastique doit-on considérer ?

$\Rightarrow$ Une modélisation physique de $\mathcal{E}$ est nécessaire.

Etude et analyse de vésicules par l'optimisation de formes

Le point de vue : leur forme est la solution d'un problème d'optimisation

$$\exists \Omega^* \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}, \quad \mathcal{E}(\Omega^*) = \min_{\Omega \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}} \mathcal{E}(\Omega).$$

La problématique : a-t-on l'existence d'une solution optimale ?

- Quelle type d'énergie élastique doit-on considérer ?

⇒ *Une modélisation physique de $\mathcal{E}$ est nécessaire.*

- Parmi quelles formes doit-on minimiser cette énergie ?

⇒ *Seront admissibles les surfaces qui sont "comme" la sphère :*

$$\mathcal{A} = \left\{ \Omega \subseteq \mathbb{R}^3, \quad \partial\Omega \text{ surface } C^{1,1} \text{ compacte simplement connexe} \right\}.$$

Etude et analyse de vésicules par l'optimisation de formes

Le point de vue : leur forme est la solution d'un problème d'optimisation

$$\exists \Omega^* \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}, \quad \mathcal{E}(\Omega^*) = \min_{\Omega \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}} \mathcal{E}(\Omega).$$

La problématique : a-t-on l'existence d'une solution optimale ?

- Quelle type d'énergie élastique doit-on considérer ?

⇒ Une modélisation physique de $\mathcal{E}$ est nécessaire.

- Parmi quelles formes doit-on minimiser cette énergie ?

⇒ Seront admissibles les surfaces qui sont "comme" la sphère :

$$\mathcal{A} = \{ \Omega \subseteq \mathbb{R}^3, \quad \partial\Omega \text{ surface } C^{1,1} \text{ compacte simplement connexe} \}.$$

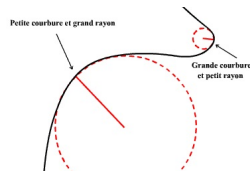
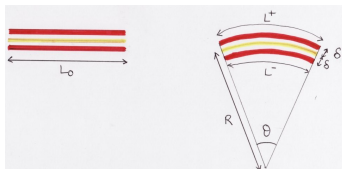
- Quelles sont les différentes contraintes à considérer ?

⇒ L'aire de la membrane et le volume de fluide qu'elle contient :

$$\mathcal{C} = \{ \Omega \in \mathcal{A}, \quad |\partial\Omega| = A_0 \text{ et } |\Omega| = V_0 \}.$$

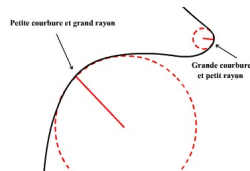
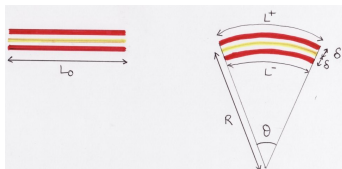
Présentation d'un modèle 2D simplifié

- **Objectif** : modéliser l'influence de la courbure en terme d'énergie.



Présentation d'un modèle 2D simplifié

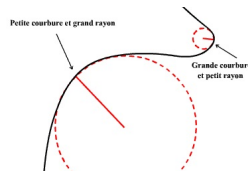
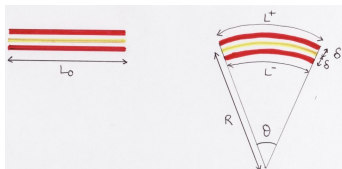
- **Objectif** : modéliser l'influence de la courbure en terme d'énergie.



- **Problème** : les queues disposent de $L_0 = R\theta$ pour s'agencer alors que les têtes seulement de $L^\pm = (R \pm \delta)\theta$.

Présentation d'un modèle 2D simplifié

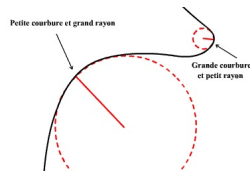
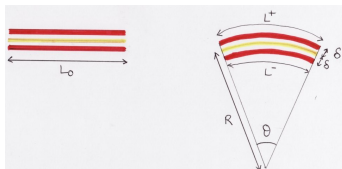
- **Objectif** : modéliser l'influence de la courbure en terme d'énergie.



- **Problème** : les queues disposent de $L_0 = R\theta$ pour s'agencer alors que les têtes seulement de $L^\pm = (R \pm \delta)\theta$.
- **Hypothèse** : la force $F^\pm$ nécessaire pour comprimer/étirer les couches est celle d'un élastique c'est-à-dire $F^\pm = k \frac{d^\pm}{L_0}$.

Présentation d'un modèle 2D simplifié

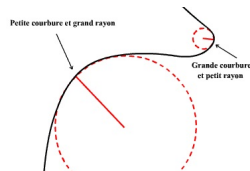
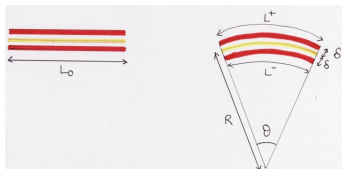
- **Objectif** : modéliser l'influence de la courbure en terme d'énergie.



- **Problème** : les queues disposent de $L_0 = R\theta$ pour s'agencer alors que les têtes seulement de $L^\pm = (R \pm \delta)\theta$.
- **Hypothèse** : la force $F^\pm$ nécessaire pour comprimer/étirer les couches est celle d'un élastique c'est-à-dire $F^\pm = k \frac{d^\pm}{L_0}$.
- **Conséquence** : l'énergie associée vaut alors $E^\pm := \frac{1}{2} F^\pm d^\pm = k_b \frac{L_0}{2R^2}$.

Présentation d'un modèle 2D simplifié

- **Objectif** : modéliser l'influence de la courbure en terme d'énergie.



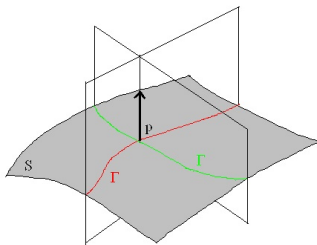
- **Problème** : les queues disposent de $L_0 = R\theta$ pour s'agencer alors que les têtes seulement de $L^\pm = (R \pm \delta)\theta$.
- **Hypothèse** : la force $F^\pm$ nécessaire pour comprimer/étirer les couches est celle d'un élastique c'est-à-dire $F^\pm = k \frac{d^\pm}{L_0}$.
- **Conséquence** : l'énergie associée vaut alors $E^\pm := \frac{1}{2} F^\pm d^\pm = k_b \frac{L_0}{2R^2}$.
- **Conclusion** : l'énergie d'une portion (infinitésimale) de membrane vaut $E := E^+ + E^- = k_b \frac{L_0}{R^2}$ et l'énergie totale $\mathcal{E}$ de la vésicule

$$\mathcal{E} := \int_{\text{membrane}} E = k_b \int_{\text{membrane}} \frac{L_0}{R^2} = k_b \int_{\text{membrane}} \kappa^2 ds.$$

La modélisation physique de Canham-Helfrich (1970-1973)

Le passage à la 3D : la courbure moyenne et la courbure de Gauss.

- Le raisonnement précédent se généralise dans l'espace.
- Remplacer la courbure $\kappa = \frac{1}{R}$ par la courbure moyenne H .

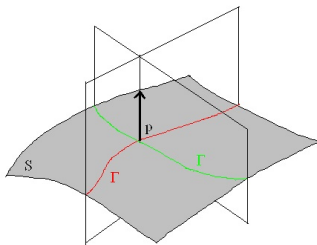


$$\begin{cases} H = \kappa_1 + \kappa_2 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \\ K = \kappa_1 \cdot \kappa_2 = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} \end{cases}$$

La modélisation physique de Canham-Helfrich (1970-1973)

Le passage à la 3D : la courbure moyenne et la courbure de Gauss.

- Le raisonnement précédent se généralise dans l'espace.
- Remplacer la courbure $\kappa = \frac{1}{R}$ par la courbure moyenne H .



$$\begin{cases} H = \kappa_1 + \kappa_2 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \\ K = \kappa_1 \cdot \kappa_2 = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} \end{cases}$$

Ce sont la trace et le déterminant de $D\mathbf{n}$ représenté dans sa base de diagonalisation où $\mathbf{n} : \mathbf{p} \in \mathcal{S} \mapsto \mathbf{n}(\mathbf{p}) \in \mathbb{S}^2$ désigne l'application de Gauss.

La modélisation physique de Canham-Helfrich (1970-1973)

L'aire ainsi que le volume de fluide qu'elle contient étant imposés, une vésicule minimise l'énergie élastique suivante :

$$\mathcal{E} := \frac{k_b}{2} \int_{\text{membrane}} (H - H_0)^2 dA + k_G \int_{\text{membrane}} K dA.$$

La modélisation physique de Canham-Helfrich (1970-1973)

L'aire ainsi que le volume de fluide qu'elle contient étant imposés, une vésicule minimise l'énergie élastique suivante :

$$\mathcal{E} := \frac{k_b}{2} \int_{\text{membrane}} (H - H_0)^2 dA + k_G \int_{\text{membrane}} K dA.$$

• **La courbure spontanée :** $H_0 \propto A_{\text{ext}} - A_{\text{int}}.$

⇒ Elle caractérise l'asymétrie de la bicouche.

La modélisation physique de Canham-Helfrich (1970-1973)

L'aire ainsi que le volume de fluide qu'elle contient étant imposés, une vésicule minimise l'énergie élastique suivante :

$$\mathcal{E} := \frac{k_b}{2} \int_{\text{membrane}} (H - H_0)^2 dA + k_G \int_{\text{membrane}} K dA.$$

- **La courbure spontanée :** $H_0 \propto A_{\text{ext}} - A_{\text{int}}$.

⇒ Elle caractérise l'asymétrie de la bicouche.

- **Les modules de flexion :** $k_G < 0 < k_b$.

⇒ La semi-continuité (varifolds) est assurée pour $-2k_b < k_G < 0$.

Théorème (Gauss-Bonnet)

Pour toute $C^{1,1}$ -surface $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ connexe compacte de genre $g \in \mathbb{N}$, on a :

$$\int_{\Sigma} K dA = 4\pi(1 - g).$$

Apports et plan de l'exposé

Question : le problème d'optimisation suivant possède-t-il un minimum ?
 A-t-on choisi la bonne énergie $\mathcal{E}$, la bonne classe d'objets $\mathcal{A}$?

$$\inf_{\substack{\Omega \subset \mathbb{R}^3, \partial\Omega \simeq \mathbb{S}^2 \\ A(\partial\Omega) = A_0 \\ V(\Omega) = V_0}} \frac{1}{4} \int_{\partial\Omega} (H - H_0)^2 dA$$

Apports et plan de l'exposé

Question : le problème d'optimisation suivant possède-t-il un minimum ?
 A-t-on choisi la bonne énergie $\mathcal{E}$, la bonne classe d'objets $\mathcal{A}$?

$$\inf_{\substack{\Omega \subset \mathbb{R}^3, \partial\Omega \simeq \mathbb{S}^2 \\ A(\partial\Omega) = A_0 \\ V(\Omega) = V_0}} \frac{1}{4} \int_{\partial\Omega} (H - H_0)^2 dA$$

Des axes de recherche possibles et soulevés par le modèle :

- **existence, unicité, propriétés, régularité des minimiseurs ;**
- simulations numériques adéquates (*méthodes level-set, phase-field*) ;
- couplage de la structure avec la dynamique d'un fluide ;
- rhéologie d'une multitude de vésicules dans un écoulement ;
- contrôler la forme à partir d'une partie du bord.

Apports et plan de l'exposé

❶ **Sans contrainte/Avec une contrainte d'aire** : minimiser Helfrich.

⇒ *Optimalité de la sphère (minimum global/local, point critique).*

Apports et plan de l'exposé

① Sans contrainte/Avec une contrainte d'aire : minimiser Helfrich.

⇒ *Optimalité de la sphère (minimum global/local, point critique).*

$$\frac{1}{4} \int_{\Sigma} (H - H_0)^2 dA = \frac{1}{4} \int_{\Sigma} H^2 dA - \frac{H_0}{2} \int_{\Sigma} H dA + \frac{H_0^2 A_0}{4}.$$

② Cas $H_0 < 0$: si sphère optimale pour $\int H$, alors aussi pour Helfrich.

Apports et plan de l'exposé

❶ Sans contrainte/Avec une contrainte d'aire : minimiser Helfrich.

⇒ *Optimalité de la sphère (minimum global/local, point critique).*

$$\frac{1}{4} \int_{\Sigma} (H - H_0)^2 dA = \frac{1}{4} \int_{\Sigma} H^2 dA - \frac{H_0}{2} \int_{\Sigma} H dA + \frac{H_0^2 A_0}{4}.$$

❷ Cas $H_0 < 0$: si sphère optimale pour $\int H$, alors aussi pour Helfrich.

⇒ Etude d'un autre problème d'optimisation :

$$\inf_{A(\Sigma)=A_0} \frac{1}{2} \int_{\Sigma} H dA.$$

Apports et plan de l'exposé

① Sans contrainte/Avec une contrainte d'aire : minimiser Helfrich.

⇒ *Optimalité de la sphère (minimum global/local, point critique).*

$$\frac{1}{4} \int_{\Sigma} (H - H_0)^2 dA = \frac{1}{4} \int_{\Sigma} H^2 dA - \frac{H_0}{2} \int_{\Sigma} H dA + \frac{H_0^2 A_0}{4}.$$

② Cas $H_0 < 0$: si sphère optimale pour $\int H$, alors aussi pour Helfrich.

⇒ Etude d'un autre problème d'optimisation :

$$\inf_{A(\Sigma)=A_0} \frac{1}{2} \int_{\Sigma} H dA.$$

③ Aire et volume fixés : existence théorique car sphère plus solution.

Apports et plan de l'exposé

① Sans contrainte/Avec une contrainte d'aire : minimiser Helfrich.

⇒ *Optimalité de la sphère (minimum global/local, point critique).*

$$\frac{1}{4} \int_{\Sigma} (H - H_0)^2 dA = \frac{1}{4} \int_{\Sigma} H^2 dA - \frac{H_0}{2} \int_{\Sigma} H dA + \frac{H_0^2 A_0}{4}.$$

② Cas $H_0 < 0$: si sphère optimale pour $\int H$, alors aussi pour Helfrich.

⇒ Etude d'un autre problème d'optimisation :

$$\inf_{A(\Sigma)=A_0} \frac{1}{2} \int_{\Sigma} H dA.$$

③ Aire et volume fixés : existence théorique car sphère plus solution.

⇒ *Une condition de boule uniforme qui assure l'existence pour :*

$$\inf_{\Omega} \int_{\partial\Omega} j[\mathbf{x}, \mathbf{n}_{\partial\Omega}(\mathbf{x}), H_{\partial\Omega}(\mathbf{x}), K_{\partial\Omega}(\mathbf{x}), u_{\Omega}(\mathbf{x}), \nabla u_{\Omega}(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x}).$$

Le cas sans contrainte : la sphère est-elle optimale ?

Théorème (Alexandrov, 1962)

Soient $H_0 > 0$ et $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ une C^2 -surface connexe compacte. Alors, on a :

$$\frac{1}{4} \int_{\Sigma} (H - H_0)^2 dA \geq 0,$$

avec égalité ssi Σ est une sphère de rayon $2/H_0$.

Le cas sans contrainte : la sphère est-elle optimale ?

Théorème (Alexandrov, 1962)

Soient $H_0 > 0$ et $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ une C^2 -surface connexe compacte. Alors, on a :

$$\frac{1}{4} \int_{\Sigma} (H - H_0)^2 dA \geq 0,$$

avec égalité ssi Σ est une sphère de rayon $2/H_0$.

Théorème (Willmore, 1982)

Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ une C^2 -surface compacte connexe. Alors, on a :

$$\frac{1}{4} \int_{\Sigma} H^2 dA \geq 4\pi,$$

avec égalité ssi Σ est une sphère.

Le cas sans contrainte : la boule est-elle optimale ?

Proposition

Soit $H_0 < 0$. Pour toute C^2 -surface $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ connexe et compacte, on a :

$$\frac{1}{4} \int_{\Sigma} (H - H_0)^2 dA > 4\pi,$$

et l'énergie $\frac{1}{4} \int (H - H_0)^2 dA$ associée à la suite de sphères $(\mathbb{S}_a)_{a>0}$ tend vers $4\pi^+$ quand leur rayon $a \rightarrow 0^+$.

Le cas sans contrainte : la boule est-elle optimale ?

Proposition

Soit $H_0 < 0$. Pour toute C^2 -surface $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ connexe et compacte, on a :

$$\frac{1}{4} \int_{\Sigma} (H - H_0)^2 dA > 4\pi,$$

et l'énergie $\frac{1}{4} \int (H - H_0)^2 dA$ associée à la suite de sphères $(\mathbb{S}_a)_{a>0}$ tend vers $4\pi^+$ quand leur rayon $a \rightarrow 0^+$.

Preuve : adapter les arguments utilisés par Willmore dans le cas $H_0 = 0$.

Arguments : $H^2 - 4K = (\kappa_1 - \kappa_2)^2 \geq 0$ + formule de l'aire + surjectivité de l'application de Gauss sur $\{\mathbf{x} \in \Sigma, K \geq 0 \text{ et } H \geq 0\}$.

$$\int_{\Sigma} (H - H_0)^2 \geq \int_{H \geq 0} (H - H_0)^2 > \int_{H \geq 0} H^2 \geq 4 \int_{\substack{H \geq 0 \\ K \geq 0}} K \geq 4(4\pi).$$

Le cas sans contrainte : la boule est-elle optimale ?

En résumé : sans contrainte, le problème de la minimisation de l'énergie de Helfrich est résolu parmi les C^2 -surfaces connexes compactes de $\mathbb{R}^3$

$$\inf_{\Sigma} \frac{1}{4} \int_{\Sigma} (H - H_0)^2 dA.$$

	$H_0 < 0$	$H_0 = 0$	$H_0 > 0$
Existence	pas de minimiseur	les sphères	sphère de rayon $2/H_0$
Helfrich	4π	4π	0

Le cas sans contrainte : la boule est-elle optimale ?

En résumé : sans contrainte, le problème de la minimisation de l'énergie de Helfrich est résolu parmi les C^2 -surfaces connexes compactes de $\mathbb{R}^3$

$$\inf_{\Sigma} \frac{1}{4} \int_{\Sigma} (H - H_0)^2 dA.$$

	$H_0 < 0$	$H_0 = 0$	$H_0 > 0$
Existence	pas de minimiseur	les sphères	sphère de rayon $2/H_0$
Helfrich	4π	4π	0

Remarques :

- Même résultats pour Canham-Helfrich avec $k_G < 0 < k_b$.

$$\inf_{\Sigma} \frac{k_b}{2} \int_{\Sigma} (H - H_0)^2 dA + k_G \int_{\Sigma} K dA.$$

- Le cas $H_0 = 0$ reste vrai parmi les $C^{1,1}$ -surfaces simplement connexes compactes de $\mathbb{R}^3$.

Avec une contrainte d'aire : la sphère est-elle optimale ?

On se ramène à $\mathbb{S}^2$ avec un seul paramètre adimensionnel $c_0 := \frac{H_0}{2} \sqrt{\frac{A_0}{4\pi}}$:

$$\inf_{A(\Sigma)=A_0} \frac{1}{4} \int_{\Sigma} (H - H_0)^2 dA = \inf_{A(\Sigma)=4\pi} \frac{1}{4} \int_{\Sigma} (H - 2c_0)^2 dA.$$

Avec une contrainte d'aire : la sphère est-elle optimale ?

On se ramène à $\mathbb{S}^2$ avec un seul paramètre adimensionnel $c_0 := \frac{H_0}{2} \sqrt{\frac{A_0}{4\pi}}$:

$$\inf_{A(\Sigma)=A_0} \frac{1}{4} \int_{\Sigma} (H - H_0)^2 dA = \inf_{A(\Sigma)=4\pi} \frac{1}{4} \int_{\Sigma} (H - 2c_0)^2 dA.$$

Paramètre $c_0 = \frac{H_0}{2} \sqrt{\frac{A_0}{4\pi}}$	$-\infty$	c_-	0	1	c_+	$+\infty$
$\mathbb{S}_{A_0}$ minimum global ?	NON	[	?	[OUI]	?	] NON

Avec une contrainte d'aire : la sphère est-elle optimale ?

On se ramène à $\mathbb{S}^2$ avec un seul paramètre adimensionnel $c_0 := \frac{H_0}{2} \sqrt{\frac{A_0}{4\pi}}$:

$$\inf_{A(\Sigma)=A_0} \frac{1}{4} \int_{\Sigma} (H - H_0)^2 dA = \inf_{A(\Sigma)=4\pi} \frac{1}{4} \int_{\Sigma} (H - 2c_0)^2 dA.$$

Paramètre $c_0 = \frac{H_0}{2} \sqrt{\frac{A_0}{4\pi}}$	$-\infty$	c_-	0	1	c_+	$+\infty$
$\mathbb{S}_{A_0}$ minimum global ?	NON	[	?	[OUI]	?	] NON

Proposition

Soient $A_0 > 0$ et $H_0 \in \mathbb{R}$ tel que $c_0 \in [0, 1]$. Alors, la sphère $\mathbb{S}_{A_0}$ est l'unique minimiseur global de :

$$\inf_{A(\Sigma)=A_0} \frac{1}{4} \int_{\Sigma} (H - H_0)^2 dA.$$

Avec une contrainte d'aire : cas où la sphère est optimale

Preuve : elle est basée sur l'inégalité de Cauchy-Schwartz. On a :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4} \int_{\Sigma} (H - H_0)^2 dA &= \frac{1}{4} \int_{\Sigma} H^2 dA - \frac{H_0}{2} \int_{\Sigma} H dA + \frac{H_0^2 A_0}{4} \\
 &\geq \frac{1}{4} \int_{\Sigma} H^2 dA - |H_0| \sqrt{A_0} \sqrt{\frac{1}{4} \int_{\Sigma} H^2 dA} + \frac{H_0^2 A_0}{4} \\
 &= 4\pi \left(\sqrt{\frac{\frac{1}{4} \int_{\Sigma} H^2 dA}{4\pi}} - |c_0| \right)^2.
 \end{aligned}$$

Avec une contrainte d'aire : cas où la sphère est optimale

Preuve : elle est basée sur l'inégalité de Cauchy-Schwartz. On a :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4} \int_{\Sigma} (H - H_0)^2 dA &= \frac{1}{4} \int_{\Sigma} H^2 dA - \frac{H_0}{2} \int_{\Sigma} H dA + \frac{H_0^2 A_0}{4} \\
 &\geq \frac{1}{4} \int_{\Sigma} H^2 dA - |H_0| \sqrt{A_0} \sqrt{\frac{1}{4} \int_{\Sigma} H^2 dA} + \frac{H_0^2 A_0}{4} \\
 &= 4\pi \left(\sqrt{\frac{\frac{1}{4} \int_{\Sigma} H^2 dA}{4\pi}} - |c_0| \right)^2.
 \end{aligned}$$

En utilisant Willmore $\frac{1}{4} \int_{\Sigma} H^2 dA \geq 4\pi$ et l'hypothèse $c_0 \in [0, 1]$, on a :

$$\frac{1}{4} \int_{\Sigma} (H - H_0)^2 dA \geq 4\pi (1 - c_0)^2 = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{S}_{A_0}} (H - H_0)^2 dA.$$

Avec une contrainte d'aire : cas où la sphère est optimale

Preuve : elle est basée sur l'inégalité de Cauchy-Schwartz. On a :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4} \int_{\Sigma} (H - H_0)^2 dA &= \frac{1}{4} \int_{\Sigma} H^2 dA - \frac{H_0}{2} \int_{\Sigma} H dA + \frac{H_0^2 A_0}{4} \\
 &\geq \frac{1}{4} \int_{\Sigma} H^2 dA - |H_0| \sqrt{A_0} \sqrt{\frac{1}{4} \int_{\Sigma} H^2 dA} + \frac{H_0^2 A_0}{4} \\
 &= 4\pi \left(\sqrt{\frac{\frac{1}{4} \int_{\Sigma} H^2 dA}{4\pi}} - |c_0| \right)^2.
 \end{aligned}$$

En utilisant Willmore $\frac{1}{4} \int_{\Sigma} H^2 dA \geq 4\pi$ et l'hypothèse $c_0 \in [0, 1]$, on a :

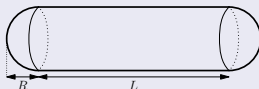
$$\frac{1}{4} \int_{\Sigma} (H - H_0)^2 dA \geq 4\pi (1 - c_0)^2 = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{S}_{A_0}} (H - H_0)^2 dA.$$

Cas d'égalité : on a donc $\frac{1}{4} \int_{\Sigma} H^2 dA = 4\pi$ ce qui assure $\Sigma \equiv \mathbb{S}_{A_0}$.

Avec une contrainte d'aire : minimiser parmi les cigares

Définition

On appelle *cigare* tout cylindre de longueur $L \geq 0$ sur lequel on a recollé de manière $C^{1,1}$ deux demi-sphères de rayon $R > 0$.



Proposition

Soient $A_0 > 0$ et $H_0 > 0$. On pose $c_+ = \frac{1}{4} (1 + \sqrt{2})^2$ et $\mathbb{C}_{R_-}$ le cigare d'aire A_0 et de rayon $R_- = \sqrt{\frac{A_0}{3\pi}} \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{-3}{H_0} \sqrt{\frac{3\pi}{A_0}} \right) + \frac{4\pi}{3} \right]$. On a :

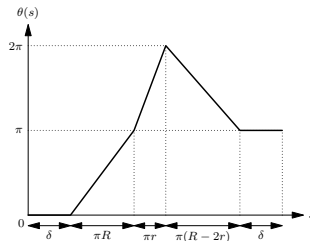
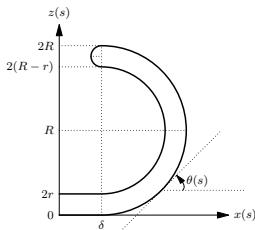
Paramètre $c_0 = \frac{H_0}{2} \sqrt{\frac{A_0}{4\pi}}$	0	$c_+ \sim 1.46$	$+\infty$
Cigare minimiseur	$\mathbb{S}_{A_0}$	$\mathbb{S}_{A_0}$ et $\mathbb{C}_{R_-}$	$\mathbb{C}_{R_-}$

Avec une contrainte d'aire : sphère versus double-sphère

Proposition

Soient $A_0 > 0$ et $H_0 < 0$. On pose $c_- = \frac{1}{8 \cos \theta} \sim -0.575$, où θ est l'unique solution de $\tan x = x$ sur $] \pi, \frac{3\pi}{2} [$. Alors il existe une suite $(\Sigma_r)_{r>0} \subset \mathbb{R}^3$ de $C^{1,1}$ -surfaces axisymétriques telles que :

$$\frac{1}{4} \int_{\Sigma_r} (H - H_0)^2 dA - \frac{1}{4} \int_{\mathbb{S}_{A_0}} (H - H_0)^2 dA \xrightarrow{r \rightarrow 0^+} 8\pi (c_0 - c_-).$$



Minimiser parmi les convexes : l'inégalité de Minkowski

- **Rappel des motivations** : minimiser Helfrich + aire fixée + $H_0 < 0$.

$$\frac{1}{4} \int_{\Sigma} (H - H_0)^2 dA \geq \frac{1}{4} \int_{\mathbb{S}_{A_0}} H^2 dA - H_0 \inf_{A(\Sigma)=A_0} \frac{1}{2} \int_{\Sigma} H dA + \frac{H_0^2 A_0}{4}$$

Minimiser parmi les convexes : l'inégalité de Minkowski

- **Rappel des motivations** : minimiser Helfrich + aire fixée + $H_0 < 0$.

$$\frac{1}{4} \int_{\Sigma} (H - H_0)^2 dA \geq \frac{1}{4} \int_{\mathbb{S}_{A_0}} H^2 dA - H_0 \inf_{A(\Sigma)=A_0} \frac{1}{2} \int_{\Sigma} H dA + \frac{H_0^2 A_0}{4}$$

- Si la sphère est optimale pour $\int H$, alors aussi pour Helfrich.

⇒ *Etude de la courbure moyenne totale* :

$$\inf_{A(\Sigma)=A_0} \frac{1}{2} \int_{\Sigma} H dA.$$

Minimiser parmi les convexes : l'inégalité de Minkowski

- **Rappel des motivations** : minimiser Helfrich + aire fixée + $H_0 < 0$.

$$\frac{1}{4} \int_{\Sigma} (H - H_0)^2 dA \geq \frac{1}{4} \int_{\mathbb{S}_{A_0}} H^2 dA - H_0 \inf_{A(\Sigma)=A_0} \frac{1}{2} \int_{\Sigma} H dA + \frac{H_0^2 A_0}{4}$$

- Si la sphère est optimale pour $\int H$, alors aussi pour Helfrich.

⇒ *Etude de la courbure moyenne totale* :

$$\inf_{A(\Sigma)=A_0} \frac{1}{2} \int_{\Sigma} H dA.$$

Théorème (Minkowski, 1901-1903)

Pour tout ouvert non-vidé $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ borné convexe telle que $\partial\Omega$ soit une C^2 -surface :

$$M(\Omega) := \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} H dA \geq \sqrt{4\pi A(\partial\Omega)},$$

avec égalité ssi Ω est une boule.

Minimiser dans la classe des axiconvexes

Définition

Une $C^{1,1}$ -surface axisymétrique est dite axiconvexe si elle est générée par une fonction θ à valeurs dans $[0, \pi]$.

Minimiser dans la classe des axiconvexes

Définition

Une $C^{1,1}$ -surface axisymétrique est dite axiconvexe si elle est générée par une fonction θ à valeurs dans $[0, \pi]$.

Autre caractérisations : $s \mapsto z(s)$ est croissant, Σ est convexe dans une direction orthogonal à l'axe de révolution (l'intersection avec un plan orthogonal à l'axe est vide ou un cercle).

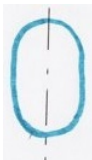
Minimiser dans la classe des axiconvexes

Définition

Une $C^{1,1}$ -surface axisymétrique est dite axiconvexe si elle est générée par une fonction θ à valeurs dans $[0, \pi]$.

Autre caractérisations : $s \mapsto z(s)$ est croissant, Σ est convexe dans une direction orthogonal à l'axe de révolution (l'intersection avec un plan orthogonal à l'axe est vide ou un cercle).

Exemples : convexe + axisymétrique $\subset$ axiconvexe $\subset$ axisymétrique.



$\subsetneq$



$\subsetneq$



Minimiser dans la classe des axiconvexes

Théorème (D., Henrot, Masnou, Takahashi)

Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ une $C^{1,1}$ -surface axiconvexe. Alors on a :

$$\frac{1}{2} \int_{\Sigma} H dA \geq \sqrt{4\pi A(\Sigma)},$$

avec égalité ssi Σ est une sphère.

Minimiser dans la classe des axiconvexes

Théorème (D., Henrot, Masnou, Takahashi)

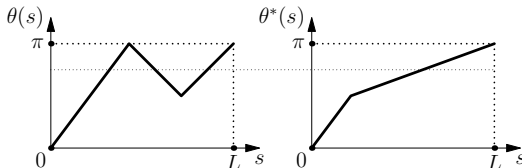
Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ une $C^{1,1}$ -surface axiconvexe. Alors on a :

$$\frac{1}{2} \int_{\Sigma} H dA \geq \sqrt{4\pi A(\Sigma)},$$

avec égalité ssi Σ est une sphère.

Preuve : utiliser un réarrangement croissant de la fonction θ :

$$\forall s \in [0, L], \theta^*(s) = \sup\{c \in [0, \pi], s \in [L - |u \geq c|, L]\}$$



Minimiser dans la classe des axiconvexes

Proposition (Propriétés du réarrangement croissant)

- 1 L'application θ^* est croissante, de même module de Lipschitz que θ .
- 2 Pour tout $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue, $\int_0^L F[\theta(s)]ds = \int_0^L F[\theta^*(s)]ds$.
- 3 Pour tout $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue strict. croissant, $[F(\theta)]^* = F(\theta^*)$.
- 4 Inégalité de Hardy-Littlewood : $\int_0^L \theta_1(s)\theta_2(s)ds \leq \int_0^L \theta_1^*(s)\theta_2^*(s)ds$

Minimiser dans la classe des axiconvexes

Proposition (Propriétés du réarrangement croissant)

- ① *L'application θ^* est croissante, de même module de Lipschitz que θ .*
- ② *Pour tout $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue, $\int_0^L F[\theta(s)]ds = \int_0^L F[\theta^*(s)]ds$.*
- ③ *Pour tout $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue strict. croissant, $[F(\theta)]^* = F(\theta^*)$.*
- ④ *Inégalité de Hardy-Littlewood : $\int_0^L \theta_1(s)\theta_2(s)ds \leq \int_0^L \theta_1^*(s)\theta_2^*(s)ds$*

- Vérifier que θ^* génère une $C^{1,1}$ -surface axisymétrique convexe Σ^* .

Minimiser dans la classe des axiconvexes

Proposition (Propriétés du réarrangement croissant)

- ① *L'application θ^* est croissante, de même module de Lipschitz que θ .*
- ② *Pour tout $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue, $\int_0^L F[\theta(s)]ds = \int_0^L F[\theta^*(s)]ds$.*
- ③ *Pour tout $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue strict. croissant, $[F(\theta)]^* = F(\theta^*)$.*
- ④ *Inégalité de Hardy-Littlewood : $\int_0^L \theta_1(s)\theta_2(s)ds \leq \int_0^L \theta_1^*(s)\theta_2^*(s)ds$*

- Vérifier que θ^* génère une $C^{1,1}$ -surface axisymétrique convexe Σ^* .
- Comparer les courbures moyennes totales de Σ et Σ^* :

$$\frac{1}{2} \int_{\Sigma} H dA = \frac{1}{2} \int_{\Sigma^*} H dA \geq \sqrt{4\pi A(\Sigma^*)} (\geq \sqrt{4\pi A(\Sigma)}).$$

Minimiser dans la classe des axiconvexes

Proposition (Propriétés du réarrangement croissant)

- ① *L'application θ^* est croissante, de même module de Lipschitz que θ .*
- ② *Pour tout $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue, $\int_0^L F[\theta(s)]ds = \int_0^L F[\theta^*(s)]ds$.*
- ③ *Pour tout $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue strict. croissant, $[F(\theta)]^* = F(\theta^*)$.*
- ④ *Inégalité de Hardy-Littlewood : $\int_0^L \theta_1(s)\theta_2(s)ds \leq \int_0^L \theta_1^*(s)\theta_2^*(s)ds$*

- Vérifier que θ^* génère une $C^{1,1}$ -surface axisymétrique convexe Σ^* .
- Comparer les courbures moyennes totales de Σ et Σ^* :

$$\frac{1}{2} \int_{\Sigma} H dA = \frac{1}{2} \int_{\Sigma^*} H dA \geq \sqrt{4\pi A(\Sigma^*)} (\geq \sqrt{4\pi A(\Sigma)}).$$

- Comparer les aires (inégalité de Hardy-Littlewood) + cas d'égalité :

$$\frac{L^2}{2} + \frac{A(\Sigma)}{2\pi} = \int_0^L s(1 - \cos \theta(s))ds \leq \int_0^L s(1 - \cos \theta^*(s))ds.$$

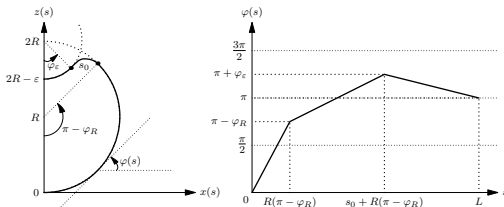
Minimiser dans la classe des surfaces

Théorème (D., Henrot, Masnou, Takahashi)

Soit $A_0 > 0$. Il existe une suite $(\Sigma_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ de $C^{1,1}$ -surfaces satisfaisant :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad A(\Sigma_\varepsilon) = A_0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \int_{\Sigma_\varepsilon} H dA \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} -\infty.$$

Preuve : $\frac{1}{2} \int H dA = 4\pi R - \pi \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \varepsilon + o(\varepsilon), \quad A(\Sigma_\varepsilon) = 4\pi R^2 + \pi \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2).$



Faire des trous $N_\varepsilon \sim \frac{1}{\varepsilon^2}$ puis homothétie tel que $A(\Sigma_\varepsilon) = A_0$ et $\int H dA \sim -\frac{1}{\varepsilon}$.

Concernant l'optimalité de la sphère

Proposition

Soit $A_0 > 0$. Concernant le problème d'optimisation :

$$\inf_{A(\Sigma)=A_0} \frac{1}{2} \int_{\Sigma} H dA,$$

- la sphère est un minimiseur local vis-à-vis de toute C^2 -perturbations ;
- la sphère est l'unique point critique parmi les surfaces de classe C^3 .

Concernant l'optimalité de la sphère

Proposition

Soit $A_0 > 0$. Concernant le problème d'optimisation :

$$\inf_{A(\Sigma)=A_0} \frac{1}{2} \int_{\Sigma} H dA,$$

- la sphère est un minimiseur local vis-à-vis de toute C^2 -perturbations ;
- la sphère est l'unique point critique parmi les surfaces de classe C^3 .

Preuve :

- Les variations premières de $\frac{1}{2} \int H dA$ et $\int 1 dA$ donne $2K = \lambda H$.
- $H^2 \geq K$ + arguments de continuité $\implies \lambda > 0$ et $K > 0$ (convexe).
- Calcul de λ : $\frac{1}{2} \int H dA = \frac{4\pi}{\lambda} = \lambda A_0$ (égalité dans Minkowski).

Minimiser dans la classe des surfaces axisymétriques

Théorème (Simon, 1973, et Topping, 2008)

Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ une C^2 -surface compacte connexe. Alors, on a :

$$\frac{1}{2} \int_{\Sigma} |H| dA \geq \sqrt{\frac{\pi}{2} A(\Sigma)}.$$

Minimiser dans la classe des surfaces axisymétriques

Théorème (Simon, 1973, et Topping, 2008)

Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ une C^2 -surface compacte connexe. Alors, on a :

$$\frac{1}{2} \int_{\Sigma} |H| dA \geq \sqrt{\frac{\pi}{2} A(\Sigma)}.$$

$\Rightarrow$ **Nouveau problème à considérer :** $\inf_{A(\Sigma)=A_0} \frac{1}{2} \int_{\Sigma} |H| dA.$

Minimiser dans la classe des surfaces axisymétriques

Théorème (Simon, 1973, et Topping, 2008)

Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ une C^2 -surface compacte connexe. Alors, on a :

$$\frac{1}{2} \int_{\Sigma} |H| dA \geq \sqrt{\frac{\pi}{2} A(\Sigma)}.$$

$\Rightarrow$ **Nouveau problème à considérer :** $\inf_{A(\Sigma)=A_0} \frac{1}{2} \int_{\Sigma} |H| dA.$

Théorème (D., Henrot, Masnou, Takahashi)

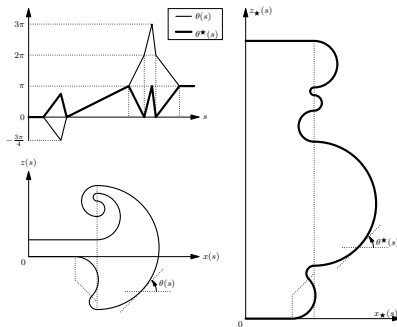
Pour toute $C^{1,1}$ -surface axisymétrique $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, on a :

$$\frac{1}{2} \int_{\Sigma} |H| dA \geq \sqrt{4\pi A(\Sigma)},$$

avec égalité ssi Σ est une sphère.

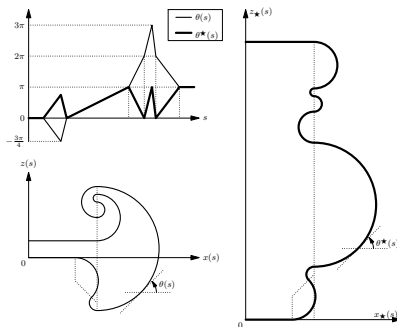
Minimiser dans la classe des surfaces axisymétriques

Preuve : $\forall s \in [0, L], \theta^\star(s) = \begin{cases} \theta(s) - 2k\pi & \text{if } \theta(s) \in [2k\pi, (2k+1)\pi[, \\ 2k\pi - \theta(s) & \text{if } \theta(s) \in [(2k-1)\pi, 2k\pi[. \end{cases}$



Minimiser dans la classe des surfaces axisymétriques

Preuve : $\forall s \in [0, L], \theta^\star(s) = \begin{cases} \theta(s) - 2k\pi & \text{if } \theta(s) \in [2k\pi, (2k+1)\pi[, \\ 2k\pi - \theta(s) & \text{if } \theta(s) \in [(2k-1)\pi, 2k\pi[. \end{cases}$



On vérifie que $\Sigma^\star$ génère une surface axiconvexe puis on a :

$$\frac{1}{2} \int_{\Sigma} |H| dA \geq \frac{1}{2} \int_{\Sigma^\star} H dA \geq \sqrt{4\pi A(\Sigma^\star)} = \sqrt{4\pi A(\Sigma)}.$$

Contraintes d'aire et de volume : existence pour Helfrich

Rappel des motivations : minimiser Helfrich à aire et volume fixés.

Le choix de A_0 et V_0 ne peut être arbitraire (inégalité isopér. $A_0^3 > 36\pi V_0^2$).

$$\inf_{\substack{A(\partial\Omega)=A_0 \\ V(\Omega)=V_0}} \frac{1}{4} \int_{\partial\Omega} (H - H_0)^2 dA.$$

Contraintes d'aire et de volume : existence pour Helfrich

Rappel des motivations : minimiser Helfrich à aire et volume fixés.

Le choix de A_0 et V_0 ne peut être arbitraire (inégalité isopér. $A_0^3 > 36\pi V_0^2$).

$$\inf_{\substack{A(\partial\Omega)=A_0 \\ V(\Omega)=V_0}} \frac{1}{4} \int_{\partial\Omega} (H - H_0)^2 dA.$$

Problème ouvert : démontrer l'existence d'un minimiseur régulier.

- SUITE MINIMISANTE : $\mathcal{E}(\Omega_i) \longrightarrow \inf_{\Omega \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}} \mathcal{E}(\Omega)$.
- COMPACITÉ : *a-t-on* $(\Omega_{\psi(i)}) \longrightarrow \Omega^* ?$ (topologie riche en compacts)
- CONTINUITÉ : *a-t-on* $\mathcal{E}(\Omega_{\psi(i)}) \longrightarrow \mathcal{E}(\Omega^*) ?$ (topologie riche en ouverts)
- RÉGULARITÉ : *a-t-on* $\Omega^* \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C} ?$ (**difficile** car Ω^* peu régulier a priori)

Contraintes d'aire et de volume : existence pour Helfrich

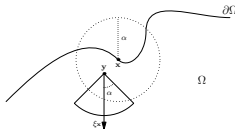
Rappel des motivations : minimiser Helfrich à aire et volume fixés.
 Le choix de A_0 et V_0 ne peut être arbitraire (inégalité isopér. $A_0^3 > 36\pi V_0^2$).

$$\inf_{\substack{A(\partial\Omega)=A_0 \\ V(\Omega)=V_0}} \frac{1}{4} \int_{\partial\Omega} (H - H_0)^2 dA.$$

Problème ouvert : démontrer l'existence d'un minimiseur régulier.

- SUITE MINIMISANTE : $\mathcal{E}(\Omega_i) \rightarrow \inf_{\Omega \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}} \mathcal{E}(\Omega)$.
- COMPACITÉ : $a\text{-}t\text{-}on (\Omega_{\psi(i)}) \rightarrow \Omega^*$? (topologie riche en compacts)
- CONTINUITÉ : $a\text{-}t\text{-}on \mathcal{E}(\Omega_{\psi(i)}) \rightarrow \mathcal{E}(\Omega^*)$? (topologie riche en ouverts)
- RÉGULARITÉ : $a\text{-}t\text{-}on \Omega^* \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}$? (**difficile** car Ω^* peu régulier a priori)

Stratégie : introduire une classe plus raisonnable assurant l'existence.
 Exemple : régularité uniforme $C^{0,1}$ et condition du α -cône (Chenais, 1975).

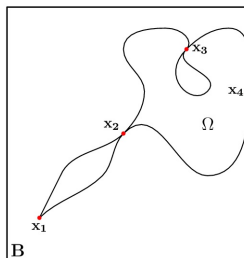
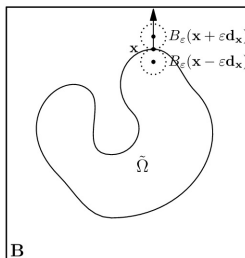


La classe $\mathcal{O}_\varepsilon(B)$ des ouverts vérifiant la condition d' ε -boule

Définition

Soient $\varepsilon > 0$ et $B \subseteq \mathbb{R}^3$. Un ouvert $\Omega \subset B$ vérifie la condition d' ε -boule si :

$$\forall \mathbf{x} \in \partial\Omega, \exists \mathbf{d}_\mathbf{x} \in \mathbb{S}^2, \quad \begin{cases} B_\varepsilon(\mathbf{x} - \varepsilon \mathbf{d}_\mathbf{x}) \subseteq \Omega \\ B_\varepsilon(\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{d}_\mathbf{x}) \subseteq B \setminus \bar{\Omega}. \end{cases}$$



Remarque sur ε : la classe $\mathcal{O}_\varepsilon(\mathbb{R}^3)$ modéliserait le squelette du globule rouge.

Deux caractérisations possibles pour la condition d' ε -boule

Ω vérifie la condition d' ε -boule pour un certain réel $\varepsilon > 0$;



$\partial\Omega$ est de reach positif $R(\varepsilon) > 0$ au sens de Federer (1959) ;



$\partial\Omega$ est une surface de $\mathbb{R}^3$ de classe $C^{1,1}$ (uniformément).

Deux caractérisations possibles pour la condition d' ε -boule

Ω vérifie la condition d' ε -boule pour un certain réel $\varepsilon > 0$;



$\partial\Omega$ est de reach positif $R(\varepsilon) > 0$ au sens de Federer (1959) ;



$\partial\Omega$ est une surface de $\mathbb{R}^3$ de classe $C^{1,1}$ (uniformément).

Proposition

Soit $\Omega \notin \{\emptyset, \mathbb{R}^3\}$ un ouvert tel que $\partial\Omega$ n'est pas un plan affine. On a :

$$\text{Reach}(\partial\Omega) = \max \{ \varepsilon, \Omega \in \mathcal{O}_\varepsilon(\mathbb{R}^3) \}.$$

Deux caractérisations possibles pour la condition d' ε -boule

Ω vérifie la condition d' ε -boule pour un certain réel $\varepsilon > 0$;
 $\Updownarrow$
 $\partial\Omega$ est de reach positif $R(\varepsilon) > 0$ au sens de Federer (1959) ;
 $\Updownarrow$
 $\partial\Omega$ est une surface de $\mathbb{R}^3$ de classe $C^{1,1}$ (uniformément).

Proposition

Soit $\Omega \notin \{\emptyset, \mathbb{R}^3\}$ un ouvert tel que $\partial\Omega$ n'est pas un plan affine. On a :

$$\text{Reach}(\partial\Omega) = \max \{ \varepsilon, \Omega \in \mathcal{O}_\varepsilon(\mathbb{R}^3) \}.$$

- $\partial\Omega$ satisfait la propriété du $\alpha(\varepsilon)$ -cône selon Chenais (1975).
- $\mathbf{d}_x$ est la normale unitaire extérieure à $\partial\Omega$ en chaque point x .
- L'application de Gauss $\mathbf{d} : x \in \partial\Omega \mapsto \mathbf{d}_x$ est $\frac{1}{\varepsilon}$ -lipschitzienne.

Compacité pour la condition d'épsilon-boule

Compacité pour la condition d'épsilon-boule

Théorème (Chenais, 1975)

Soient $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $B \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert borné lipschitzien assez large. Si $(\Omega_i) \subset \mathfrak{D}_\alpha(B)$, alors il existe $\Omega \in \mathfrak{D}_\alpha(B)$ tel que :

- $\Omega_{\psi(i)} \longrightarrow \Omega$ (Hausdorff, compacts, fonctions caractéristiques)
- $\partial\Omega_{\psi(i)} \longrightarrow \partial\Omega$ (Hausdorff) et $\overline{\Omega_{\psi(i)}} \longrightarrow \overline{\Omega}$ (Hausdorff).

Compacité pour la condition d'épsilon-boule

Théorème (Chenais, 1975)

Soient $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $B \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert borné lipschitzien assez large. Si $(\Omega_i) \subset \mathfrak{D}_\alpha(B)$, alors il existe $\Omega \in \mathfrak{D}_\alpha(B)$ tel que :

- $\Omega_{\psi(i)} \longrightarrow \Omega$ (Hausdorff, compacts, fonctions caractéristiques)
- $\partial\Omega_{\psi(i)} \longrightarrow \partial\Omega$ (Hausdorff) et $\overline{\Omega_{\psi(i)}} \longrightarrow \overline{\Omega}$ (Hausdorff).

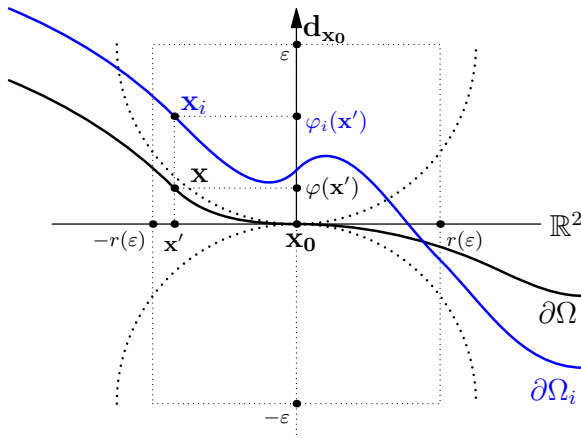
Corollaire

Soient $\varepsilon > 0$ et $B \subset \mathbb{R}^3$ comme ci-dessus. Alors $\mathcal{O}_\varepsilon(B)$ est aussi compact.

Preuve : on a $\mathcal{O}_\varepsilon(B) \subset \mathfrak{D}_{\alpha(\varepsilon)}(B)$ (ε -boule $\Rightarrow \alpha(\varepsilon)$ -cone) + vérifier que $\mathcal{O}_\varepsilon(B)$ est fermée pour la convergence au sens de Hausdorff.

Continuité de fonctionnelles géométriques d'ordre deux

Idée : paramétrer localement dans un repère **commun** fixe tous les graphes associés aux bords $\partial\Omega_i$ d'une suite convergeant dans $\mathcal{O}_\varepsilon(B)$.



Continuité de fonctionnelles géométriques d'ordre deux

Théorème

Soit $(\Omega_i) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(B)$ convergeant vers $\Omega \in \mathcal{O}_\varepsilon(B)$. Pour tout $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$, il existe un ROND centré en $\mathbf{x}_0$ et $l(\mathbf{x}_0, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que dans ce repère pour tout $i \geq l$, il existe $\varphi_i : \overline{D_{r(\varepsilon)}(0)} \rightarrow]-\varepsilon, \varepsilon[$ de classe $C^{1,1}$, dont le gradient $\nabla\varphi_i$ et φ_i sont $L(\varepsilon)$ -lipschitziens, et telle que :

$$\begin{cases} \partial\Omega_i \cap (\overline{D_{r(\varepsilon)}(0)} \times [-\varepsilon, \varepsilon]) = \{(\mathbf{x}', \varphi_i(\mathbf{x}')) \mid \mathbf{x}' \in \overline{D_{r(\varepsilon)}(0)}\} \\ \Omega_i \cap (\overline{D_{r(\varepsilon)}(0)} \times [-\varepsilon, \varepsilon]) = \{(\mathbf{x}', x_n) \mid \mathbf{x}' \in \overline{D_{r(\varepsilon)}(0)}, -\varepsilon \leq x_n < \varphi_i(\mathbf{x}')\}. \end{cases}$$

De plus, en considérant la fonction φ associée au point $\mathbf{x}_0$ de la $C^{1,1}$ -surface $\partial\Omega$, on a :

$$\varphi_i \rightarrow \varphi \text{ dans } C^1(\overline{D_{r(\varepsilon)}(0)}) \text{ et } \varphi_i \rightharpoonup \varphi \text{ faible } * \text{ dans } W^{2,\infty}(D_{r(\varepsilon)}(0)).$$

Continuité de fonctionnelles géométriques d'ordre deux

Proposition

Soient $(\Omega_i) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(B)$ convergeant vers $\Omega \in \mathcal{O}_\varepsilon(B)$ et $j_0, j_1 : B \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continue en chacune de leurs variables. Alors, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\partial\Omega_i} j_0[\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x}) \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} \int_{\partial\Omega} j_0[\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x}) \\ \int_{\partial\Omega_i} H(\mathbf{x}) j_1[\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x}) \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} \int_{\partial\Omega} H(\mathbf{x}) j_1[\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x}). \end{array} \right.$$

Continuité de fonctionnelles géométriques d'ordre deux

Proposition

Soient $(\Omega_i) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(B)$ convergeant vers $\Omega \in \mathcal{O}_\varepsilon(B)$ et $j_0, j_1 : B \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continue en chacune de leurs variables. Alors, on a :

$$\begin{cases} \int_{\partial\Omega_i} j_0[\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x}) \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} \int_{\partial\Omega} j_0[\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x}) \\ \int_{\partial\Omega_i} H(\mathbf{x}) j_1[\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x}) \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} \int_{\partial\Omega} H(\mathbf{x}) j_1[\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x}). \end{cases}$$

Preuve : passage du local au global grâce à une partition de l'unité adaptée au recouvrement de $\overline{\mathcal{V}_{\delta(\varepsilon)}(\partial\Omega)} \subset \bigcup_{k=1}^K C_\varepsilon(\mathbf{x}_k)$.

Continuité de fonctionnelles géométriques d'ordre deux

Proposition

Soient $(\Omega_i) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(B)$ convergeant vers $\Omega \in \mathcal{O}_\varepsilon(B)$ et $j_0, j_1 : B \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continue en chacune de leurs variables. Alors, on a :

$$\begin{cases} \int_{\partial\Omega_i} j_0[\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x}) \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} \int_{\partial\Omega} j_0[\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x}) \\ \int_{\partial\Omega_i} H(\mathbf{x}) j_1[\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x}) \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} \int_{\partial\Omega} H(\mathbf{x}) j_1[\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x}). \end{cases}$$

Preuve : passage du local au global grâce à une partition de l'unité adaptée au recouvrement de $\overline{\mathcal{V}_{\delta(\varepsilon)}(\partial\Omega)} \subset \bigcup_{k=1}^K C_\varepsilon(\mathbf{x}_k)$.

- *Théorème aux $(\mathbf{x}_k) \subset \partial\Omega$: il existe $(\varphi_i^k)_{i \geq l_k} \rightarrow \varphi^k$ dans C^1 et dans $W^{2,\infty}$.*
- $\Rightarrow \mathbf{n}_{\partial\Omega_i} \rightarrow \mathbf{n}_{\partial\Omega}$ (cv uniforme) + $H_{\partial\Omega_i} \rightharpoonup H_{\partial\Omega}$ (L^∞ faible *).

Continuité de fonctionnelles géométriques d'ordre deux

Proposition

Soient $(\Omega_i) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(B)$ convergeant vers $\Omega \in \mathcal{O}_\varepsilon(B)$ et $j_0, j_1 : B \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continue en chacune de leurs variables. Alors, on a :

$$\begin{cases} \int_{\partial\Omega_i} j_0[\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x}) \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} \int_{\partial\Omega} j_0[\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x}) \\ \int_{\partial\Omega_i} H(\mathbf{x}) j_1[\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x}) \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} \int_{\partial\Omega} H(\mathbf{x}) j_1[\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x}). \end{cases}$$

Preuve : passage du local au global grâce à une partition de l'unité adaptée au recouvrement de $\overline{\mathcal{V}_{\delta(\varepsilon)}(\partial\Omega)} \subset \bigcup_{k=1}^K C_\varepsilon(\mathbf{x}_k)$.

- Théorème aux $(\mathbf{x}_k) \subset \partial\Omega$: il existe $(\varphi_i^k)_{i \geq I_k} \rightarrow \varphi^k$ dans C^1 et dans $W^{2,\infty}$.
- ⇒ $\mathbf{n}_{\partial\Omega_i} \rightarrow \mathbf{n}_{\partial\Omega}$ (cv uniforme) + $H_{\partial\Omega_i} \rightharpoonup H_{\partial\Omega}$ (L^∞ faible *).
- Prendre $i \geq I(\varepsilon) = \max_{1 \leq k \leq K} I_k$ puis écrire la fonctionnelle.
- Passer correctement à la limite $i \rightarrow +\infty$ (produit cv L^∞ faible * / L^1 forte).

Continuité de fonctionnelles géométriques d'ordre deux

Proposition

Soient $(\Omega_i) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(B)$ convergeant vers $\Omega \in \mathcal{O}_\varepsilon(B)$ et $j_2 : B \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continue en chacune de ses variables. Alors, on a :

$$\int_{\partial\Omega_i} K(\mathbf{x}) j_2[\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x}) \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} \int_{\partial\Omega} K(\mathbf{x}) j_2[\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x})$$

Continuité de fonctionnelles géométriques d'ordre deux

Proposition

Soient $(\Omega_i) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(B)$ convergeant vers $\Omega \in \mathcal{O}_\varepsilon(B)$ et $j_2 : B \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continue en chacune de ses variables. Alors, on a :

$$\int_{\partial\Omega_i} K(\mathbf{x}) j_2[\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x}) \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} \int_{\partial\Omega} K(\mathbf{x}) j_2[\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x})$$

Preuve : il suffit de montrer que $K_{\partial\Omega_i} \rightharpoonup K_{\partial\Omega}$ dans L^∞ faible $*$.

- On a seulement la cv des coeff. de $D\mathbf{n}$: OK pour $H = \text{Trace}(D\mathbf{n})$
- PAS CLAIR pour $K = \det(D\mathbf{n})$ (non-linéaire et cv $\notin W^{1,p}$).

Continuité de fonctionnelles géométriques d'ordre deux

Proposition

Soient $(\Omega_i) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(B)$ convergeant vers $\Omega \in \mathcal{O}_\varepsilon(B)$ et $j_2 : B \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continue en chacune de ses variables. Alors, on a :

$$\int_{\partial\Omega_i} K(\mathbf{x}) j_2[\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x}) \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} \int_{\partial\Omega} K(\mathbf{x}) j_2[\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x})$$

Preuve : il suffit de montrer que $K_{\partial\Omega_i} \rightharpoonup K_{\partial\Omega}$ dans L^∞ faible $*$.

- On a seulement la cv des coeff. de $D\mathbf{n}$: OK pour $H = \text{Trace}(D\mathbf{n})$
- PAS CLAIR pour $K = \det(D\mathbf{n})$ (non-linéaire et cv $\notin W^{1,p}$).

Question : $u_i \rightharpoonup u$ dans $L^\infty(U, \mathbb{R}^M)$ et $F(u_i) \rightharpoonup \bar{F}$. A-t-on $\bar{F} = F(u)$?

$\Rightarrow$ Compacité par compensation (div-curl lemma) version L^∞ (Tartar)

- On dispose d'opérateurs différentiels $(A^k u_i) \subset\subset H^{-1}$.
- $\bar{F} = F(u)$ si F quadratique et $F = 0$ sur un cône d'oscillation $\Lambda(A^k)$.

Continuité de fonctionnelles géométriques d'ordre deux

Preuve (fin) : utiliser les équations de (Gauss-)Codazzi-Mainardi

$$\begin{cases} \partial_1 b_{12} - \partial_2 b_{11} = (\Gamma_{11}^1 b_{12} - \Gamma_{12}^1 b_{11}) + (\Gamma_{11}^2 b_{22} - \Gamma_{12}^2 b_{21}) \\ \partial_1 b_{22} - \partial_2 b_{21} = (\Gamma_{21}^1 b_{12} - \Gamma_{22}^1 b_{11}) + (\Gamma_{21}^2 b_{22} - \Gamma_{22}^2 b_{21}) . \end{cases}$$

Continuité de fonctionnelles géométriques d'ordre deux

Preuve (fin) : utiliser les équations de (Gauss-)Codazzi-Mainardi

$$\begin{cases} \partial_1 b_{12} - \partial_2 b_{11} = (\Gamma_{11}^1 b_{12} - \Gamma_{12}^1 b_{11}) + (\Gamma_{11}^2 b_{22} - \Gamma_{12}^2 b_{21}) \\ \partial_1 b_{22} - \partial_2 b_{21} = (\Gamma_{21}^1 b_{12} - \Gamma_{22}^1 b_{11}) + (\Gamma_{21}^2 b_{22} - \Gamma_{22}^2 b_{21}) . \end{cases}$$

Le cône d'oscillation associé :

$$\Lambda = \{M \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}), \det M = 0\}.$$

Continuité de fonctionnelles géométriques d'ordre deux

Preuve (fin) : utiliser les équations de (Gauss-)Codazzi-Mainardi

$$\begin{cases} \partial_1 b_{12} - \partial_2 b_{11} = (\Gamma_{11}^1 b_{12} - \Gamma_{12}^1 b_{11}) + (\Gamma_{11}^2 b_{22} - \Gamma_{12}^2 b_{21}) \\ \partial_1 b_{22} - \partial_2 b_{21} = (\Gamma_{21}^1 b_{12} - \Gamma_{22}^1 b_{11}) + (\Gamma_{21}^2 b_{22} - \Gamma_{22}^2 b_{21}) . \end{cases}$$

Le cône d'oscillation associé :

$$\Lambda = \{M \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}), \det M = 0\}.$$

Corollaire

Soient $(\Omega_i) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(B) \longrightarrow \Omega \in \mathcal{O}_\varepsilon(B)$ et $j_3, j_4 : B \times \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue en chacune de leurs variables et **convexe** en leur dernière. Alors, on a :

$$\begin{cases} \liminf_{i \rightarrow +\infty} \int_{\partial\Omega_i} j_3[\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x}), H(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x}) \leq \int_{\partial\Omega} j_3[\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x}), H(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x}) \\ \liminf_{i \rightarrow +\infty} \int_{\partial\Omega_i} j_4[\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x}), K(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x}) \leq \int_{\partial\Omega} j_4[\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x}), K(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x}). \end{cases}$$

Continuité de fonctionnelles géométriques d'ordre deux

Théorème

Soient $\varepsilon > 0$ et $B \subseteq \mathbb{R}^3$ une boule assez large. Les applications sont continues en leurs variables, convexes en leur dernière. Alors il existe un minimiseur à :

$$\inf \int_{\partial\Omega} j_0 [\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x}) + \int_{\partial\Omega} j_1 [\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x}), H(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x}) + \int_{\partial\Omega} j_2 [\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x}), K(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x}),$$

où l'infimum est pris parmi tous les $\Omega \in \mathcal{O}_\varepsilon(B)$ satisfaisant les contraintes :

$$\begin{cases} \int_{\partial\Omega} f_0 [\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x}) + \int_{\partial\Omega} f_1 [\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x}), H(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x}) + \int_{\partial\Omega} f_2 [\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x}), K(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x}) \leq C \\ \int_{\partial\Omega} g_0 [\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x}) + \int_{\partial\Omega} H(\mathbf{x}) g_1 [\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x}) + \int_{\partial\Omega} K(\mathbf{x}) g_2 [\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x}) = \tilde{C}. \end{cases}$$

Continuité de fonctionnelles géométriques d'ordre deux

Théorème

Soient $\varepsilon > 0$ et $B \subseteq \mathbb{R}^3$ une boule assez large. Les applications sont continues en leurs variables, convexes en leur dernière. Alors il existe un minimiseur à :

$$\inf \int_{\partial\Omega} j_0 [\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x}) + \int_{\partial\Omega} j_1 [\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x}), H(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x}) + \int_{\partial\Omega} j_2 [\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x}), K(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x}),$$

où l'infimum est pris parmi tous les $\Omega \in \mathcal{O}_\varepsilon(B)$ satisfaisant les contraintes :

$$\begin{cases} \int_{\partial\Omega} f_0 [\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x}) + \int_{\partial\Omega} f_1 [\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x}), H(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x}) + \int_{\partial\Omega} f_2 [\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x}), K(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x}) \leq C \\ \int_{\partial\Omega} g_0 [\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x}) + \int_{\partial\Omega} H(\mathbf{x}) g_1 [\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x}) + \int_{\partial\Omega} K(\mathbf{x}) g_2 [\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x}) = \tilde{C}. \end{cases}$$

Exemples : Helfrich, aire, volume, genre $(\int K dA), \int H dA, \int |H|^p dA, p \geq 1 \dots$

Continuité de fonctionnelles géométriques d'ordre deux

Théorème

Soient $\varepsilon > 0$ et $B \subseteq \mathbb{R}^3$ une boule assez large. Les applications sont continues en leurs variables, convexes en leur dernière. Alors il existe un minimiseur à :

$$\inf \int_{\partial\Omega} j_0[\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x}) + \int_{\partial\Omega} j_1[\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x}), H(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x}) + \int_{\partial\Omega} j_2[\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x}), K(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x}),$$

où l'infimum est pris parmi tous les $\Omega \in \mathcal{O}_\varepsilon(B)$ satisfaisant les contraintes :

$$\begin{cases} \int_{\partial\Omega} f_0[\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x}) + \int_{\partial\Omega} f_1[\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x}), H(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x}) + \int_{\partial\Omega} f_2[\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x}), K(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x}) \leq C \\ \int_{\partial\Omega} g_0[\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x}) + \int_{\partial\Omega} H(\mathbf{x}) g_1[\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x}) + \int_{\partial\Omega} K(\mathbf{x}) g_2[\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x}) = \tilde{C}. \end{cases}$$

Exemples : Helfrich, aire, volume, genre ($\int K dA$), $\int H dA$, $\int |H|^p dA$, $p \geq 1$...

Généralisation aux cas des hypersurfaces : cv L^∞ faible * des *curvature measures* de Federer (au lieu de la cv au sens des mesures).

Continuité de fonctionnelles géométriques d'ordre deux

Théorème (cas Dirichlet)

Soient $\varepsilon > 0$, B une boule et $f \in L^2(B)$. Pour tout $\Omega \in \mathcal{O}_\varepsilon(B)$, il existe un unique $u_\Omega \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ tel que $-\Delta u_\Omega = f$ sur Ω . Soit $j : \mathbb{R}^3 \times B \times \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ continue, quadratique en sa première variable, convexe en sa dernière. Alors :

$$\min_{\substack{\Omega \in \mathcal{O}_\varepsilon(B) \\ + \text{ contraintes}}} \int_{\partial\Omega} j[\nabla u_\Omega(\mathbf{x}), \mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x}), H(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x}).$$

Continuité de fonctionnelles géométriques d'ordre deux

Théorème (cas Dirichlet)

Soient $\varepsilon > 0$, B une boule et $f \in L^2(B)$. Pour tout $\Omega \in \mathcal{O}_\varepsilon(B)$, il existe un unique $u_\Omega \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ tel que $-\Delta u_\Omega = f$ sur Ω . Soit $j : \mathbb{R}^3 \times B \times \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ continue, quadratique en sa première variable, convexe en sa dernière. Alors :

$$\min_{\substack{\Omega \in \mathcal{O}_\varepsilon(B) \\ + \text{ contraintes}}} \int_{\partial\Omega} j[\nabla u_\Omega(\mathbf{x}), \mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x}), H(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x}).$$

Preuve : a-t-on $\mathbf{x}' \rightarrow u_{\Omega_i}(\mathbf{x}', \varphi_i(\mathbf{x}'))$ qui converge vers $\mathbf{x}' \rightarrow u_\Omega(\mathbf{x}', \varphi(\mathbf{x}'))$?

$\Rightarrow$ OUI car $\|u_{\Omega_i}\|_{H^2(\Omega_i)} \leq C(\varepsilon, \text{diam} B) \|f\|_{L^2(B)}$.

Continuité de fonctionnelles géométriques d'ordre deux

Théorème (cas Dirichlet)

Soient $\varepsilon > 0$, B une boule et $f \in L^2(B)$. Pour tout $\Omega \in \mathcal{O}_\varepsilon(B)$, il existe un unique $u_\Omega \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ tel que $-\Delta u_\Omega = f$ sur Ω . Soit $j : \mathbb{R}^3 \times B \times \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ continue, quadratique en sa première variable, convexe en sa dernière. Alors :

$$\min_{\substack{\Omega \in \mathcal{O}_\varepsilon(B) \\ + \text{ contraintes}}} \int_{\partial\Omega} j[\nabla u_\Omega(\mathbf{x}), \mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x}), H(\mathbf{x})] dA(\mathbf{x}).$$

Preuve : a-t-on $\mathbf{x}' \rightarrow u_{\Omega_i}(\mathbf{x}', \varphi_i(\mathbf{x}'))$ qui converge vers $\mathbf{x}' \rightarrow u_\Omega(\mathbf{x}', \varphi(\mathbf{x}'))$?

$\Rightarrow$ OUI car $\|u_{\Omega_i}\|_{H^2(\Omega_i)} \leq C(\varepsilon, \text{diam} B) \|f\|_{L^2(B)}$.

- On peut remplacer H par K . Mêmes résultats pour Neumann/Robin.
- OK intégrale sur Ω contenant la hessienne car $\mathbf{1}_{\Omega_i} u_{\Omega_i} \rightarrow \mathbf{1}_\Omega u_\Omega$ dans $H^2(B)$:

$$\sum_{k=1}^3 \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u_\Omega}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 = \int_{\Omega} f^2 - \int_{\partial\Omega} H \|\nabla u_\Omega\|^2 dA.$$

- Application à l'identification de domaine : $\inf_{\Omega \in \mathcal{O}_\varepsilon(B), \Gamma_0 \subseteq \partial\Omega} \int_{\Gamma_0} (\partial_n u_\Omega - g_0)^2 dA.$

Conclusion : bilan et récapitulatif des résultats obtenus

- **Sans contrainte** : minimiser l'énergie de (Canham-)Helfrich parmi les C^2 -surfaces connexes compactes de $\mathbb{R}^3$.

	$H_0 < 0$	$H_0 = 0$	$H_0 > 0$
Existence	pas de minimiseur	les sphères	sphère rayon $\frac{2}{H_0}$
Helfrich	4π	4π	0
Canham-Helfrich	$4\pi (2k_b + k_G)$	$4\pi (2k_b + k_G)$	$4\pi k_G$

Conclusion : bilan et récapitulatif des résultats obtenus

- **Sans contrainte** : minimiser l'énergie de (Canham-)Helfrich parmi les C^2 -surfaces connexes compactes de $\mathbb{R}^3$.

	$H_0 < 0$	$H_0 = 0$	$H_0 > 0$
Existence	pas de minimiseur	les sphères	sphère rayon $\frac{2}{H_0}$
Helfrich	4π	4π	0
Canham-Helfrich	$4\pi (2k_b + k_G)$	$4\pi (2k_b + k_G)$	$4\pi k_G$

- **Avec une contrainte d'aire** : étude de l'optimalité de la sphère

$$\inf_{A(\Sigma)=A_0} \frac{1}{4} \int_{\Sigma} (H - H_0)^2 dA = \inf_{A(\Sigma)=4\pi} \frac{1}{4} \int_{\Sigma} (H - 2c_0)^2 dA.$$

$c_0 = \frac{H_0}{2} \sqrt{\frac{A_0}{4\pi}}$	$-\infty$	c_-	0	1	c_+	c_{++}	$+\infty$
minimum global	NON	[?	[OUI	] ?	] NON		
minimum local			OUI	] ?	] NON		
point critique				OUI			

Conclusion : bilan et récapitulatif des résultats obtenus

- **Avec une contrainte d'aire** : minimiser la courbure moyenne.

⇒ *Sphère unique point critique C^3 et toujours minimum local C^2 .*

Fonctionnelle	Convexe	Axiconvexe	Axisymétrique	$C^{1,1}$ -surface
$\frac{1}{2} \int H dA$	sphère	sphère	OUVERT	$-\infty$
$\frac{1}{2} \int H dA$			sphère	OUVERT

Conclusion : bilan et récapitulatif des résultats obtenus

- **Avec une contrainte d'aire** : minimiser la courbure moyenne.

⇒ *Sphère unique point critique C^3 et toujours minimum local C^2 .*

Fonctionnelle	Convexe	Axiconvexe	Axisymétrique	$C^{1,1}$ -surface
$\frac{1}{2} \int H dA$	sphère	sphère	OUVERT	$-\infty$
$\frac{1}{2} \int H dA$			sphère	OUVERT

- **La classe des ε -boules** assure l'existence pour des fonctionnelles géométriques d'ordre deux et modélise le squelette du globule rouge.

Conclusion : bilan et récapitulatif des résultats obtenus

- **Avec une contrainte d'aire** : minimiser la courbure moyenne.

⇒ *Sphère unique point critique C^3 et toujours minimum local C^2 .*

Fonctionnelle	Convexe	Axiconvexe	Axisymétrique	$C^{1,1}$ -surface
$\frac{1}{2} \int H dA$	sphère	sphère	OUVERT	$-\infty$
$\frac{1}{2} \int H dA$			sphère	OUVERT

- **La classe des ε -boules** assure l'existence pour des fonctionnelles géométriques d'ordre deux et modélise le squelette du globule rouge.

- 1 EXISTENCE POUR CANHAM-HELFRICH À AIRE ET VOLUME FIXÉS :

⇒ $A_0^3 > 36\pi V_0^2 + \text{contrôle uniforme du diamètre par la fonctionnelle et l'aire.}$

$$\min_{\substack{\Omega \in \mathcal{O}_\varepsilon(\mathbb{R}^3) \\ A(\partial\Omega)=A_0, V(\Omega)=V_0}} \frac{k_b}{2} \int_{\partial\Omega} (H - H_0)^2 dA + k_G \int_{\partial\Omega} K dA.$$

2D	Axisymétrique	Varifold	ε -boule	Surface
OK	$-2k_b < k_G < 0$	$-2k_b < k_G < 0$	$k_G < 0 < k_b$	OUVERT

Conclusion : bilan et récapitulatif des résultats obtenus

② EXISTENCE POUR HELFRICH À AIRE, VOLUME ET GENRE FIXÉS :

⇒ **Problème ouvert** : *existence cas général (Helfrich pas sci cv varifolds).*

$$\min_{\substack{\Omega \in \mathcal{O}_\varepsilon(\mathbb{R}^3) \\ A(\partial\Omega)=A_0, \ V(\Omega)=V_0 \\ \text{genre}(\partial\Omega)=g}} \frac{1}{4} \int_{\partial\Omega} (H - H_0)^2 dA.$$

Conclusion : bilan et récapitulatif des résultats obtenus

2 EXISTENCE POUR HELFRICH À AIRE, VOLUME ET GENRE FIXÉS :

⇒ **Problème ouvert** : *existence cas général (Helfrich pas sci cv varifolds)*.

$$\min_{\substack{\Omega \in \mathcal{O}_\varepsilon(\mathbb{R}^3) \\ A(\partial\Omega)=A_0, V(\Omega)=V_0 \\ \text{genre}(\partial\Omega)=g}} \frac{1}{4} \int_{\partial\Omega} (H - H_0)^2 dA.$$

3 EXISTENCE POUR WILLMORE AVEC DIVERSES CONTRAINTES :

⇒ **Application** : *modèle du couple-bicouche (bilayer-couple model)*

$$\min_{\substack{\Omega \in \mathcal{O}_\varepsilon(\mathbb{R}^3) \\ A(\partial\Omega)=A_0, V(\Omega)=V_0 \\ \text{genre}(\partial\Omega)=g, \int_{\partial\Omega} H dA=M_0}} \frac{1}{4} \int_{\partial\Omega} H^2 dA.$$

Contrainte	genre $g = 0$	genre $g \geq 1$
aucune	Willmore (1982)	Simon (1993)+Bauer/Kuwert (2003)
ratio isopérim.	Schygulla (2012)	Keller/Mondino/Rivière (2014)

Perspectives : Helfrich avec une contrainte de volume

- **Willmore** : minimum de $\int H^2 dA$ uniquement atteint par la sphère.
- **Inégalité isopérimétrique** : si $H_0 < 0$, idem pour $\int (H - H_0)^2 dA$ parmi les convexes/axiconvexes car :

$$\frac{1}{2} \int_{\Sigma} H dA \geq \sqrt{4\pi A(\Sigma)} \geq 2\sqrt[3]{6\pi^2 V(\Sigma)}.$$

Perspectives : Helfrich avec une contrainte de volume

- **Willmore** : minimum de $\int H^2 dA$ uniquement atteint par la sphère.
- **Inégalité isopérimétrique** : si $H_0 < 0$, idem pour $\int (H - H_0)^2 dA$ parmi les convexes/axiconvexes car :

$$\frac{1}{2} \int_{\Sigma} H dA \geq \sqrt{4\pi A(\Sigma)} \geq 2\sqrt[3]{6\pi^2 V(\Sigma)}.$$

- **Difficulté** : défaut de compacité dû au manque de contrôle sur l'aire d'une suite minimisante.
- **Problème 2D/3D ouvert** : existence (plus pour longtemps en 2D !)

$$\inf_{A(C)=A_0} \int_C \kappa(s)^2 ds.$$

Perspectives : d'autres résultats d'existence

Problème ouvert : minimiser Canham-Helfrich à aire et volume fixés parmi des surfaces régulières (décrire les singularités).

Perspectives : d'autres résultats d'existence

Problème ouvert : minimiser Canham-Helfrich à aire et volume fixés parmi des surfaces régulières (décrire les singularités).

Cas Willmore $H_0 = 0$:

- *Approche du découpage/recollement de Simon (existence genre un).*
- *Approche des immersions de Rivière (régularité des points critiques).*

⇒ quand $H_0 \neq 0$, on perd l'invariance par transformations conformes mais pour H_0 assez petit, on a toujours $\liminf_i \int_{\Sigma_i} H^2 dA < 8\pi$.

Perspectives : d'autres résultats d'existence

Problème ouvert : minimiser Canham-Helfrich à aire et volume fixés parmi des surfaces régulières (décrire les singularités).

Cas Willmore $H_0 = 0$:

- *Approche du découpage/recollement de Simon (existence genre un).*
- *Approche des immersions de Rivière (régularité des points critiques).*

⇒ quand $H_0 \neq 0$, on perd l'invariance par transformations conformes mais pour H_0 assez petit, on a toujours $\liminf_i \int_{\Sigma_i} H^2 dA < 8\pi$.

Proposition

Soient $A_0^3 > 36\pi V_0^2$ et la classe $S_{V_0}^{A_0}$ des C^∞ -plongements $\vec{\Phi} : \mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ d'aire A_0 et volume V_0 . Alors, il existe $H_0^*(A_0, V_0) > 0$ dépendant continûment de A_0 et V_0 tel que pour tout $H_0 \in]-H_0^*, H_0^*[$, toute suite minimisante

$$(\vec{\Phi}_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ de } \inf_{\Phi \in S_{V_0}^{A_0}} \frac{1}{4} \int_{\vec{\Phi}} (H - H_0)^2 dA \text{ vérifie } \liminf_{i \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} \int_{\vec{\Phi}_i} H^2 dA < 8\pi.$$

Perspectives : d'autres résultats d'existence

La classe des ε -boules permettrait d'approcher des modèles plus réalistes de globules rouges/vésicules :

$$\min_{\substack{\Omega \in \mathcal{O}_\varepsilon(\mathbb{R}^3) \\ A(\partial\Omega) = A_0 \\ V(\Omega) = V_0}} \frac{k_b}{2} \int_{\partial\Omega} (H - H_0)^2 dA + k_G \int_{\partial\Omega} K dA + \frac{k_m}{2} \left(\int_{\partial\Omega} H dA - M_0 \right)^2.$$

Perspectives : d'autres résultats d'existence

La classe des ε -boules permettrait d'approcher des modèles plus réalistes de globules rouges/vésicules :

$$\min_{\substack{\Omega \in \mathcal{O}_\varepsilon(\mathbb{R}^3) \\ A(\partial\Omega) = A_0 \\ V(\Omega) = V_0}} \frac{k_b}{2} \int_{\partial\Omega} (H - H_0)^2 dA + k_G \int_{\partial\Omega} K dA + \frac{k_m}{2} \left(\int_{\partial\Omega} H dA - M_0 \right)^2.$$

Applications en physique quantique relativiste (sac du MIT, Le Treust)

$$\inf_{\substack{\Omega \in \mathcal{O}_\varepsilon(\mathbb{R}^3) \\ V(\Omega) = V_0}} \inf_{\substack{u \in H^1(\Omega, \mathbb{C}^2) \\ \int_{\Omega} |u|^2 = 1 \\ -(\sigma \cdot \mathbf{n}_{\partial\Omega})u = u \text{ on } \partial\Omega}} \sqrt{m^2 + \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 + \int_{\partial\Omega} \left(m + \frac{H_{\partial\Omega}}{2} \right) |u|^2 dA}$$

Perspectives : d'autres résultats d'existence

La classe des ε -boules permettrait d'approcher des modèles plus réalistes de globules rouges/vésicules :

$$\min_{\substack{\Omega \in \mathcal{O}_\varepsilon(\mathbb{R}^3) \\ A(\partial\Omega) = A_0 \\ V(\Omega) = V_0}} \frac{k_b}{2} \int_{\partial\Omega} (H - H_0)^2 dA + k_G \int_{\partial\Omega} K dA + \frac{k_m}{2} \left(\int_{\partial\Omega} H dA - M_0 \right)^2.$$

Applications en physique quantique relativiste (sac du MIT, Le Treust)

$$\inf_{\substack{\Omega \in \mathcal{O}_\varepsilon(\mathbb{R}^3) \\ V(\Omega) = V_0}} \inf_{\substack{u \in H^1(\Omega, \mathbb{C}^2) \\ \int_{\Omega} |u|^2 = 1 \\ -(\sigma \cdot \mathbf{n}_{\partial\Omega})u = u \text{ on } \partial\Omega}} \sqrt{m^2 + \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 + \int_{\partial\Omega} \left(m + \frac{H_{\partial\Omega}}{2} \right) |u|^2 dA}$$

Prochaine étape : coupler la structure avec du fluide, dépendance à travers des opérateur plus généraux (elliptiques, Stokes, ...).

Perspectives : l'aspect numérique

- 1 Existence, unicité, propriétés, régularités des minimiseurs.
- 2 **Simulations numériques adéquates (*level-set*, *phase-field*).**
- 3 Couplage de la structure avec la dynamique d'un fluide.
- 4 Rhéologie d'une multitude de vésicules dans un écoulement.
- 5 Contrôler la forme à partir d'une partie du bord.

Perspectives : l'aspect numérique

- 1 Existence, unicité, propriétés, régularités des minimiseurs.
- 2 **Simulations numériques adéquates (*level-set*, *phase-field*).**
- 3 Couplage de la structure avec la dynamique d'un fluide.
- 4 Rhéologie d'une multitude de vésicules dans un écoulement.
- 5 Contrôler la forme à partir d'une partie du bord.

Calcul effectif de solutions : compléter le tableau pour l'optimalité de la sphère, gagner en intuition, décrire les points critiques (Rivière, Nagasawa), pouvoir valider un modèle (ε -boule ?).

Perspectives : l'aspect numérique

- 1 Existence, unicité, propriétés, régularités des minimiseurs.
- 2 **Simulations numériques adéquates (*level-set*, *phase-field*).**
- 3 Couplage de la structure avec la dynamique d'un fluide.
- 4 Rhéologie d'une multitude de vésicules dans un écoulement.
- 5 Contrôler la forme à partir d'une partie du bord.

Calcul effectif de solutions : compléter le tableau pour l'optimalité de la sphère, gagner en intuition, décrire les points critiques (Rivière, Nagasawa), pouvoir valider un modèle (ε -boule ?).

Problèmes purement numériques : avoir des schémas qui conservent la contrainte d'aire, développement asymptotique de schémas numériques, résultats de γ -convergence, ...

Questions et discussions : merci pour votre attention !

