

Etudiant : M. JEREMY DALPHIN né le : 05/04/1987

Diplôme : Doctorat de MATHEMATIQUES

Titre des travaux : Etude de fonctionnelles géométriques dépendant de la courbure par des méthodes d'optimisation de formes. Applications aux fonctionnelles de Willmore et Canham-Helfrich

Secteur disciplinaire : Mathématiques

Ecole doctorale : Informatique, Automatique, Electronique-Electrotechnique, Mathématiques

Formation doctorale : Mathématiques

Section CNU : 2600 - Mathématiques appliquées et applications

Unité de recherche : Institut Elie cartan de Lorraine

Directeur : M. ANTOINE HENROT

Codirecteur : M. TAKEO TAKAHASHI

Lieu de soutenance : Faculté des Sciences & Technologies - Institut Elie Cartan (Salle des Conférences) - Campus Victor Grignard 54500 Vandoeuvre-lès-Nancy

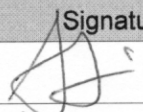
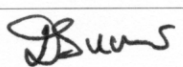
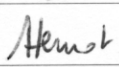
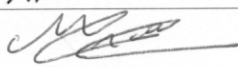
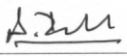
La soutenance est publique.

Résultat : *Admis*

Mention :

Avis de reproduction : *oui*

Membres du Jury

Nom	Qualité	Etablissement	Rôle	Signature
M. GREGOIRE ALLAIRE	PROFESSEUR DES UNIVERSITES	ECOLE POLYTECHNIQUE	Rapporteur	
M. GIOVANNI BELLETTINI	PROFESSEUR DES UNIVERSITES	Università degli Studi di Roma - Italie	Rapporteur	<i>absent</i>
M. DORIN BUCUR	PROFESSEUR DES UNIVERSITES	UNIVERSITE DE CHAMBERY	Membre	
M. ANTOINE HENROT	PROFESSEUR DES UNIVERSITES	UNIVERSITE DE LORRAINE	Membre	
M. SIMON MASNOU	PROFESSEUR DES UNIVERSITES	UNIVERSITE LYON 1	Membre	
Mme ANNIE RAOULT	PROFESSEUR DES UNIVERSITES	UNIVERSITE PARIS 5	Membre	
M. TAKEO TAKAHASHI	CHARGE DE RECHERCHE	INRIA	Membre	

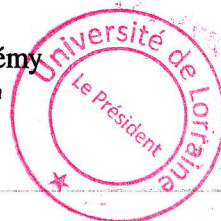
RAPPORT DE SOUTENANCE

Concernant la thèse de **Doctorat de l'Université de Lorraine**

en **MATHEMATIQUES**

Présentée par **DALPHIN JérémY**

Le **5 décembre 2014**

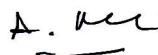


Jérémy Dalphin a présenté de manière lumineuse l'essentiel de ses travaux. Il a ainsi confirmé ses qualités pédagogiques déjà visibles dans l'introduction détaillée de sa thèse.

L'exposé a mis en valeur le large spectre des compétences du candidat en calcul des variations, géométrie des surfaces et analyse des équations aux dérivées partielles. Le jury a apprécié sa profondeur de vue mêlant perspectives théoriques et souci de la modélisation autour des énergies de Willmore et de Canham-Helfrich, qui interviennent, en particulier, pour la détermination des formes optimales des vésicules en biologie.

Le candidat a brillamment répondu aux questions du jury qui estime qu'il a toutes les qualités pour faire un excellent enseignant-chercheur.

Président du Jury - Nom, Prénom et signature :

RAOULT Annie 

Membres du Jury - Nom, Prénom et signature :

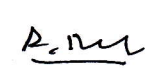
Pr ALLAIRE G. 

Pr BELLETTINI G. *absent*

Pr HENROT A. & Dr TAKAHASHI T.  

Pr BUCUR D. 

Pr MASNOU S. 

Pr RAOULT A. 

N.B. De par décision du Conseil d'administration de l'Université en date du 2 décembre 2002, les jurys de soutenance de thèse n'attribuent plus aucune mention à compter du 1^{er} janvier 2003.



UNIVERSITÉ
DE LORRAINE

FORMULAIRE A JOINDRE A VOTRE RAPPORT POUR AUTORISER LA SOUTENANCE

CANDIDAT(E) : DALPHIN Jérémy

ECOLE DOCTORALE IAEM Lorraine

Date de soutenance envisagée :

RAPPORTEUR

Nom et prénom : GIANNI BELLETTINI
Qualité : PROF
Etablissement : UNIV. ROMA TOR VERGATA, ITALY. DEP. OF MATH.

Il est demandé au rapporteur de renseigner les rubriques ci-dessous et de rédiger un rapport détaillé sur papier à en-tête du laboratoire.

Evaluation générale

Par comparaison avec des thèses de doctorat récentes soutenues dans la même discipline ou dont vous avez eu connaissance personnellement, cette thèse est à votre avis :

◆ **DIGNE D'ETRE SOUTENUE EN VUE DU DOCTORAT**

☒ oui
sans modification

☐ oui
avec modifications notables avant la soutenance

☐ oui
avec modifications mineures

☐ non
des modifications importantes doivent être apportées au mémoire de thèse, la thèse ne peut être soutenue en l'état, une nouvelle version doit être à nouveau soumise à un rapporteur

⇒ dans l'affirmative, cette thèse est-elle :

◆ **D'UN NIVEAU SCIENTIFIQUE**

☐ exceptionnel

☐ excellent

☒ très bon

☐ bon

☐ satisfaisant

☐ Passable

◆ **D'UNE PRESENTATION MATERIELLE**

☐ exceptionnelle

☒ excellente

☐ très bonne

☐ bonne

☐ satisfaisante

☐ à revoir

Fait à ROMA, le 17/11/14

Signature

3C-F5B

Merci de retourner ce document accompagné d'un rapport détaillé, signé à :

Georges BILLANT — Bureau de Gestion des Etudes Doctorales

Domaine Scientifique Victor Grignard - B.P. 239 - F 54506 VANDŒUVRE-lès-NANCY Cédex – France

Tél. : 03 83 68 40 36 - International : 00 333 83 68 40 36 - Adresse électronique : Georges.Billant@univ-lorraine.fr

Referee report on the thesis

“Etude de fonctionnelles géométriques dépendant de la courbure par des méthodes d’optimisation de formes. Applications aux fonctionnelles de Willmore et Canham-Helfrich ”

by J. Dalphin.

This thesis is a rather interesting and carefully written work on some shape optimization problem related to a class of geometric functionals on surfaces, depending on first and second derivatives of the normal unit vector. It is worthwhile to say that the variational study of functionals depending on the second fundamental form is much more difficult than the study of those depending only on the normal vector. There are various motivations for studying this subject: as emphasized by the author, one of those arises from biology. See the presentation in Chapter 1.

The author makes a panoramic on this subject, and he is mostly focused on the case when the class of boundaries where looking for a minimizer satisfies a uniform exterior and interior ball condition. This seems to be, in my opinion, really a key point of the approach, since, assuming this hypothesis, ensures enough compactness properties (and sometimes continuity, instead of lower semicontinuity). The author is able to clarify the meaning of these sentences, and this is not always technically easy. In some sense, one could say that the path followed here is not too far from a situation where the various objects are in some sense “convex”, for instance semiconvex and semiconcave at the same time (hence “worse”, but not too much, than convex).

As far as I understand, there are motivations for minimizing over the class of surfaces satisfying a uniform exterior and interior ball condition: see the comments made by the author in the end of Section 1.3.1. I have to notice that, usually, the class where minimizing a functional is, in some sense, dictated by the functional itself; for instance, for the Willmore functional, one is led to believe that minimizers should be looked for in a class of objects (say, all lying inside a ball) having square integrable mean curvature (to be defined in some sense). This is not the approach considered here, and probably it would lead too far, and in the intricate realm of geometric measure theory, especially because of lackness of enough regularity. I believe that the author is aware of this; see also the related comments written in Section 1.3.2.

The thesis can be considered as divided in four parts.

In the first part the author studies the minimization of the Helfrich functional, in presence of a spontaneous curvature (Sections 2.3 and 2.4). The constrained case are considered in Chapter 3; the regularity class where minimizing is that of $C^{1,1}$ surfaces.

The problem is not easy: it is reasonable to prescribe some symmetry conditions, such as the ones considered in Section 3.2 (cigars, axisymmetric surfaces). The problem is rather interesting also in presence of symmetry assumptions.

In the second part, a nice part of the thesis, the author considers the minimization of the total mean curvature, a problem related to the theory of convex bodies. The first result is Theorem 4.1, a Minkowski-type inequality under symmetry assumptions; interestingly, the author shows that the result cannot be extended to a suitable larger class (see Theorem 4.2 and Chapter 7 for the details). Another result (Theorem 4.3) concludes this part.

In the third part, the author starts to making a detailed review on sets satisfying the uniform interior and exterior ball condition. I agree with the author: it is not easy to find a place where the relations between positive reach, $C^{1,1}$, and the interior and exterior ball condition are written in a complete form. The article of Federer maybe is not so easy to read. Probably there is some reference that could be added to the corresponding list on this topics, such as the one of J. Fu, Duke Math. J. (1985), 1025-1046, Section 2.1. I believe to be useful to have Chapter 13 at our disposal. The results of Chapter 14 are reasonable, and not so easy to prove: in particular, Theorem 14.2, which ensures a local graph parametrization on the same domain, for all surfaces at the same time. Theorem 15.5 reminds me (but maybe I am wrong) the continuity of quermassintegrals. Chapter 15 continues with the study of linear functionals in the second fundamental form, and then with the nonlinear case. I find the results in Section 15.4 interesting, in particular the application made by the author of the div-curl lemma to this geometric setting.

The fourth part is devoted to the proof of Theorem 16.1, an estimate of the Hessian norm through the norm of the laplacian under the above mentioned assumptions on the domain; this kind of estimate is well known to be useful in partial differential equations. The results of this part seem to be an extension of similar results previously obtained under more stringent assumptions.

In conclusion, in my opinion this work is very carefully written, and it contains various interesting results. I personally classify it as a very good (très bon) PhD thesis.

Giovanni Bellettini

Dipartimento di Matematica, Università di Roma Tor Vergata

Via della Ricerca Scientifica 1, 00133 Roma, Italy

belletti@mat.uniroma2.it





UNIVERSITÉ
DE LORRAINE

FORMULAIRE A JOINDRE A VOTRE RAPPORT POUR AUTORISER LA SOUTENANCE

CANDIDAT(E) : DALPHIN JérémY

ECOLE DOCTORALE IAEM Lorraine

Date de soutenance envisagée :

RAPPORTEUR

Nom et prénom : ALLAIRE Grégory

Qualité : PROFESSEUR

Etablissement : ECOLE POLYTECHNIQUE

Il est demandé au rapporteur de renseigner les rubriques ci-dessous et de rédiger un rapport détaillé sur papier à en-tête du laboratoire.

Evaluation générale

Par comparaison avec des thèses de doctorat récentes soutenues dans la même discipline ou dont vous avez eu connaissance personnellement, cette thèse est à votre avis :

♦ **DIGNE D'ETRE SOUTENUE EN VUE DU DOCTORAT**

☒ oui

sans modification

☐ oui

avec modifications notables avant la soutenance

☐ oui

avec modifications mineures

☐ non

des modifications importantes doivent être apportées au mémoire de thèse, la thèse ne peut être soutenue en l'état, une nouvelle version doit être à nouveau soumise à un rapporteur

⇒ dans l'affirmative, cette thèse est-elle :

♦ **D'UN NIVEAU SCIENTIFIQUE**

☐ exceptionnel

☐ excellent

☒ très bon

☐ bon

☐ satisfaisant

☐ Passable

♦ **D'UNE PRESENTATION MATERIELLE**

☐ exceptionnelle

☐ excellente

☒ très bonne

☐ bonne

☐ satisfaisante

☐ à revoir

Fait à

PARIS

, le

13/11/2014

Signature

3C-F5B

Merci de retourner ce document accompagné d'un rapport détaillé, signé à :

Georges BILLANT — Bureau de Gestion des Etudes Doctorales

Domaine Scientifique Victor Grignard - B.P. 239 - F 54506 VANDŒUVRE-lès-NANCY Cédex — France

Tél. : 03 83 68 40 36 - International : 00 333 83 68 40 36 - Adresse électronique : Georges.Billant@univ-lorraine.fr

91128 PALAISEAU CEDEX (FRANCE)
tel: 33 (1) 69 33 46 11 Fax : 33 (1) 69 33 46 46
E-mail: gregoire.allaire@polytechnique.fr

Rapport sur le mémoire de thèse de Monsieur JérémY DALPHIN

La thèse de JérémY Dalphin porte sur la minimisation de fonctionnelles définies sur des surfaces et dépendant de leur courbure. L'archétype de ces fonctionnelles est l'énergie de Canham et Helfrich qui est un modèle pour trouver la forme des vésicules en biologie. Un cas particulier de cette énergie est aussi bien connue en géométrie : il s'agit de l'énergie de Wilmore. Les travaux de JérémY Dalphin répondent à des questions de nature théorique sur l'existence de surfaces minimales et sur leurs propriétés qualitatives dans diverses classes admissibles et avec des contraintes éventuelles de connexité, d'aire et de volume délimité. Ce travail de thèse a donné lieu, pour l'instant, à un acte de conférence publié ainsi qu'à un article soumis à un journal international avec comité de lecture.

L'introduction d'une quinzaine de pages est très bien écrite et permet d'avoir rapidement une vue d'ensemble des contributions de JérémY Dalphin. L'ensemble de la thèse est rédigé en anglais mais l'introduction est répétée en français, ce qui est très appréciable pour les lecteurs non anglophones (il en existe encore).

La première partie, divisée en 4 chapitres, est consacrée à la modélisation et à l'étude de l'énergie de Canham et Helfrich. Pour une surface sans bord $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, elle s'écrit

$$\mathcal{E}(\Sigma) = \frac{k_b}{2} \int_{\Sigma} (H - H_0)^2 dA + k_G \int_{\Sigma} K dA,$$

où H est la courbure moyenne, K la courbure de Gauss et H_0 une constante appelée courbure spontanée. Les paramètres sont $k_b > 0$ et $k_G \leq 0$. Dans le cas particulier $H_0 = 0$ et $k_G = 0$ on retrouve l'énergie de Wilmore.

JérémY Dalphin rappelle un certain nombre de résultats d'existence de surface Σ minimisant l'énergie $\mathcal{E}(\Sigma)$ en l'absence de contraintes supplémentaires. Puis il s'intéresse à la minimisation de $\mathcal{E}(\Sigma)$ sous une contrainte d'aire fixée pour Σ . Dans la classe des "cigares" (cylindres fermés par des demies sphères) il démontre un théorème d'existence de surfaces minimales qui sont des sphères lorsque la contrainte d'aire est suffisamment petite. Mais

surtout, par un calcul délicat de la dérivée de forme d'ordre deux d'une perturbation axisymétrique de la sphère, il démontre que cette dernière n'est pas un point de minimum local de l'énergie $\mathcal{E}(\Sigma)$ lorsque $k_G = 0$.

La deuxième partie (et ses 8 chapitres) porte sur la minimisation de la courbure totale

$$\mathcal{C}(\Sigma) = \int_{\Sigma} H \, dA,$$

sous une contrainte d'aire. Il s'agit de la reproduction d'un article écrit en collaboration avec ses directeurs de thèse et avec Simon Masnou. La motivation pour cela est que si on développe $\mathcal{E}(\Sigma)$ alors $\mathcal{C}(\Sigma)$ apparaît comme un des termes d'une combinaison impliquant aussi l'énergie de Wilmore et l'aire. Si on peut minimiser chacun des termes individuellement et que, par chance, la sphère soit un point de minimum commun, alors on a trouvé une surface minimale pour $\mathcal{E}(\Sigma)$.

La question est déjà résolue par Minkowski pour les surfaces C^2 qui délimitent un domaine convexe. En effet, dans cette classe Minkowski a prouvé l'inégalité

$$\frac{1}{2} \int_{\Sigma} H \, dA \geq \sqrt{4\pi A(\Sigma)},$$

où $A(\Sigma)$ est l'aire et avec égalité si et seulement si Σ est une sphère. Jérémy Dalphin étend cette inégalité aux surfaces $C^{1,1}$ "axiconvexes", c'est-à-dire axisymétriques et telles que toute section droite de cette surface est un cercle ou l'ensemble vide. Cela prouve que la sphère est l'unique minimiseur de $\mathcal{C}(\Sigma)$ sous contrainte d'aire dans cette classe de surfaces axiconvexes.

La troisième partie, divisée en quatre chapitres, introduit une condition de boules uniformes (interne et externe) qui force la régularité des surfaces admissibles et, par son caractère uniforme, la compacité (au sens de la distance de Hausdorff) de cette classe de surfaces. Cette notion est assez voisine, dans l'esprit, de celle de cône uniforme utilisée par Denise Chénais dans les années 1970. Elle est équivalente à la notion de "positive reach" de Federer (distance strictement positive du bord d'un domaine à son squelette, lieu où la fonction distance au bord n'est plus C^1). Jérémy Dalphin redémontre de manière complète et pédagogique ces résultats "bien connus" mais difficilement localisables dans la littérature. C'est l'objet de sa publication dans "ESAIM Proceedings". Il étudie ensuite la continuité de certaines fonctionnelles géométriques (qui contiennent les énergies de Wilmore et de Canham et Helfrich) dans cette classe de surfaces et il en déduit ainsi des résultats d'existence de surfaces minimales. Notons que cette condition de boules uniformes peut partiellement se justifier d'un point de vue biologique car certaines vésicules, comme les globules rouges, possèdent effectivement un squelette rigide qui impose une épaisseur minimale (équivalente à un "positive reach").

La quatrième partie, divisée en six chapitres, généralise l'approche de la troisième partie au cas de fonctionnelles dépendant de la solution d'une équation d'état, typiquement le Laplacien avec condition aux limites de Dirichlet. Il démontre un théorème d'existence de formes optimales dans cette classe pour une fonction objectif qui peut dépendre de la Hessienne de l'état, ce qui est une amélioration significative de l'état de l'art. Comme

applications, Jérémy Dalphin propose un problème inverse pour trouver la forme qui minimise une fonctionnelle de moindres carrés pour les données de Neumann ou de Dirichlet sur une partie du bord. Il évoque aussi quelques perspectives, notamment l'application au problème du "sac du MIT" en mécanique quantique relativiste.

La thèse de Jérémy Dalphin est une contribution importante au calcul des variations et à l'optimisation de formes. Sur des problèmes, souvent issus d'applications concrètes, il a su faire preuve d'une grande maîtrise technique et d'une créativité certaine pour apporter des solutions originales (ajout de contraintes, définition de classes admissibles, arguments perturbatifs, dérivées de forme d'ordre deux). Je ne suis pas compétent pour estimer l'impact de ses travaux en géométrie mais j'imagine qu'à minima ils sont pertinents et établissent des connections intéressantes. Jérémy Dalphin a un large spectre de compétences qui vont de l'analyse des équations aux dérivées partielles à la géométrie différentielle en passant par l'optimisation et le calcul des variations. J'estime qu'il s'agit d'une très bonne thèse de mathématiques appliquées.

J'émet donc un avis favorable à la soutenance de la thèse de Jérémy Dalphin.



Grégoire ALLAIRE
Professeur à l'Ecole Polytechnique