

Etude et analyse de vésicules par des méthodes d'optimisation de formes

Jeremy.Dalphin@mines-nancy.org

en collaboration avec

ANTOINE HENROT et TAKEO TAKAHASHI



Institut Elie Cartan–Université de Lorraine



26 mars 2014

Introduction

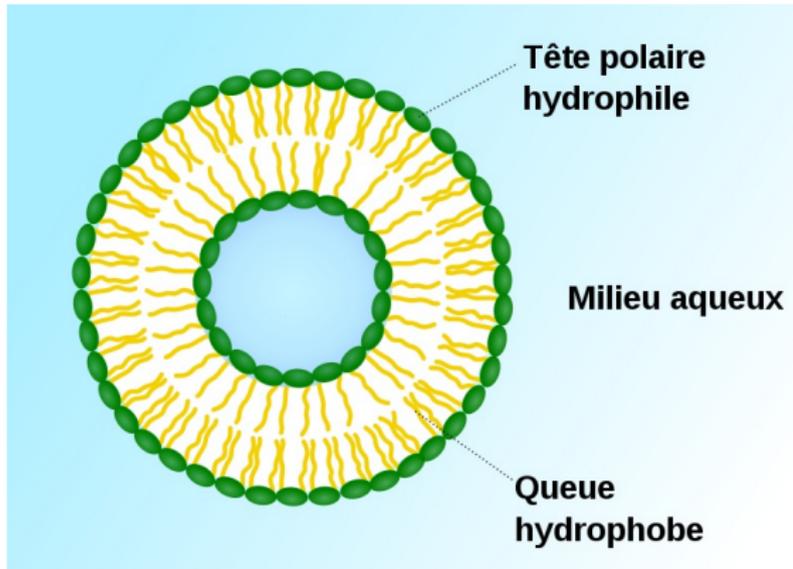
La modélisation physique
Quand la boule est-elle optimale ?
Sous contraintes d'aire et de volume
Conclusion

Qu'est ce qu'une vésicule ?
Un exemple de vésicule
Le sujet de la thèse
La problématique

Introduction : qu'est-ce qu'une vésicule ?

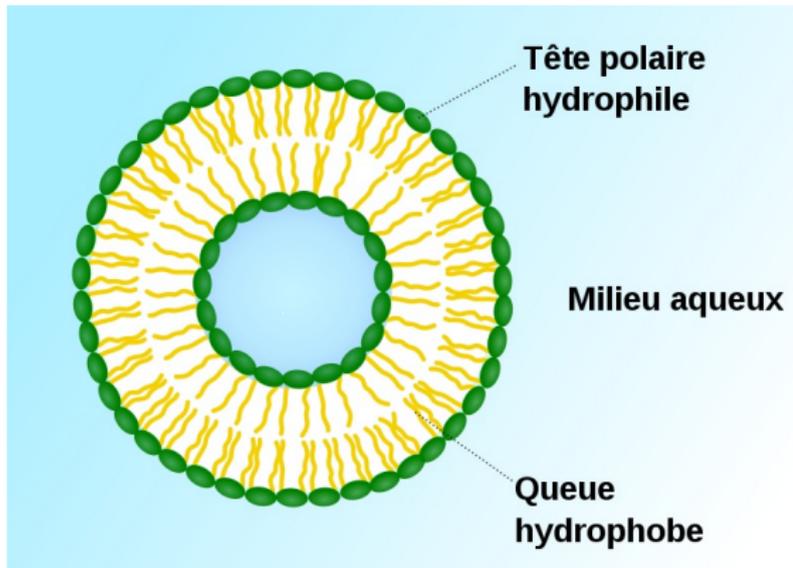
Introduction : qu'est-ce qu'une vésicule ?

- C'est un assemblage de phospholipides en milieu aqueux.



Introduction : qu'est-ce qu'une vésicule ?

- C'est un assemblage de phospholipides en milieu aqueux.



- C'est donc un sac d'eau, lui-même plongé dans un liquide !

Introduction

La modélisation physique
Quand la boule est-elle optimale ?
Sous contraintes d'aire et de volume
Conclusion

Qu'est ce qu'une vésicule ?

Un exemple de vésicule

Le sujet de la thèse
La problématique

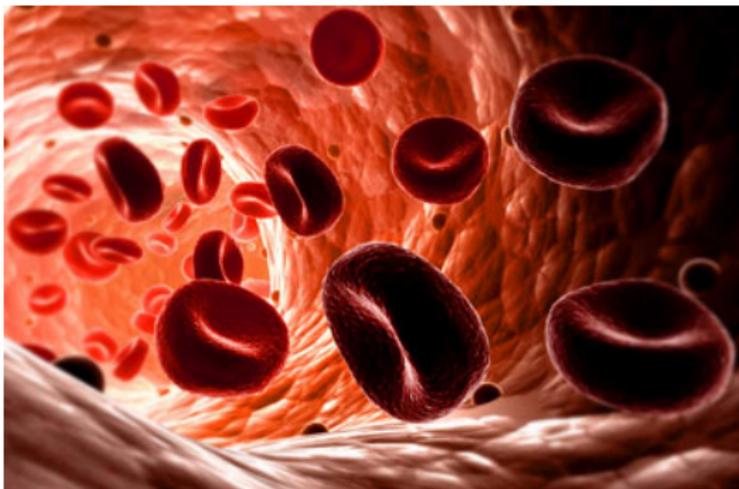
Introduction : un exemple de vésicule

Introduction : un exemple de vésicule

- C'est la membrane de base à toutes les cellules du vivant.

Introduction : un exemple de vésicule

- C'est la membrane de base à toutes les cellules du vivant.
- Le globule rouge = une vésicule + un squelette de protéines.



Introduction

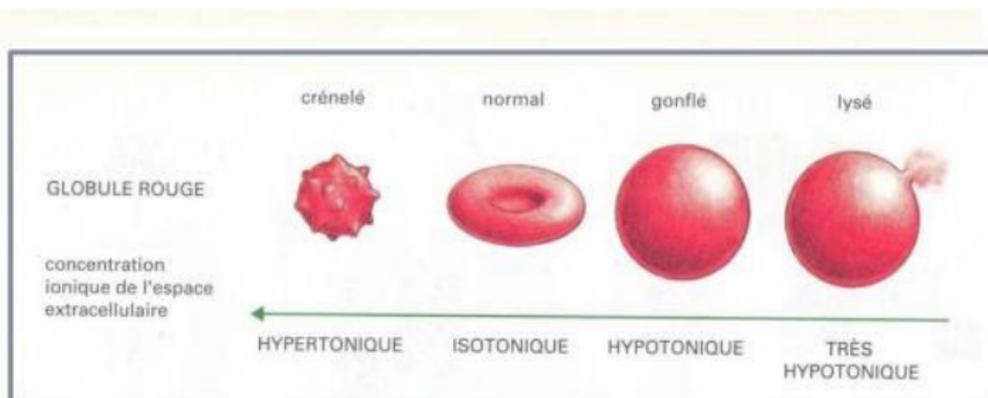
La modélisation physique
Quand la boule est-elle optimale ?
Sous contraintes d'aire et de volume
Conclusion

Qu'est ce qu'une vésicule ?
Un exemple de vésicule
Le sujet de la thèse
La problématique

Introduction : le sujet de la thèse

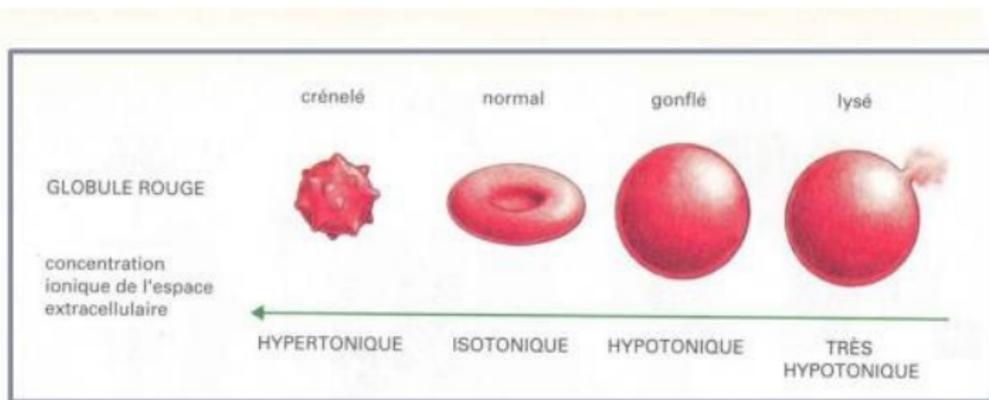
Introduction : le sujet de la thèse

- On s'intéresse aux formes que peuvent prendre les vésicules.



Introduction : le sujet de la thèse

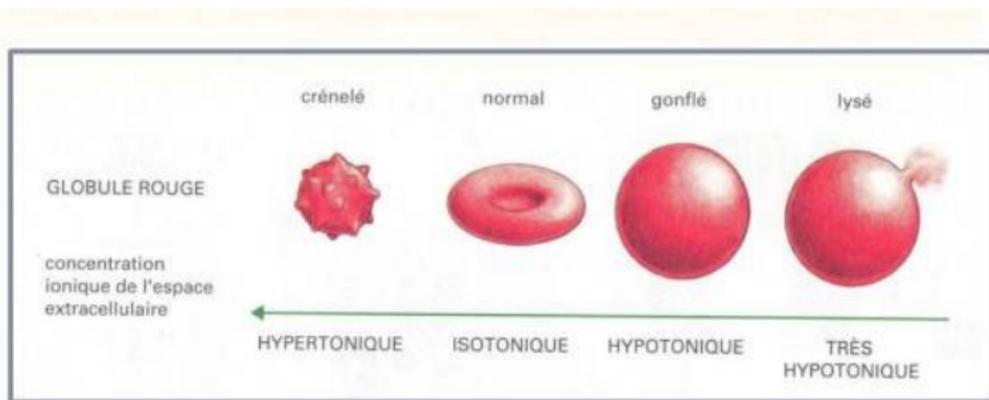
- On s'intéresse aux formes que peuvent prendre les vésicules.



- Leur forme est la solution d'un problème d'optimisation.

Introduction : le sujet de la thèse

- On s'intéresse aux formes que peuvent prendre les vésicules.



- Leur forme est la solution d'un problème d'optimisation.
- Il s'agit de minimiser une certaine énergie sous contraintes :

$$\mathcal{E}(\Omega^*) = \min_{\Omega \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}} \mathcal{E}(\Omega).$$

Introduction

La modélisation physique
Quand la boule est-elle optimale ?
Sous contraintes d'aire et de volume
Conclusion

Qu'est ce qu'une vésicule ?
Un exemple de vésicule
Le sujet de la thèse
La problématique

Introduction : la problématique $\mathcal{E}(\Omega^*) = \min_{\Omega \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}} \mathcal{E}(\Omega)$

Introduction : la problématique $\mathcal{E}(\Omega^*) = \min_{\Omega \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}} \mathcal{E}(\Omega)$

- Quel type d'énergie élastique doit-on considérer ?

Introduction : la problématique $\mathcal{E}(\Omega^*) = \min_{\Omega \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}} \mathcal{E}(\Omega)$

- Quel type d'énergie élastique doit-on considérer ?
⇒ Une modélisation physique de \mathcal{E} est nécessaire.

Introduction : la problématique $\mathcal{E}(\Omega^*) = \min_{\Omega \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}} \mathcal{E}(\Omega)$

- Quel type d'énergie élastique doit-on considérer ?
⇒ Une modélisation physique de \mathcal{E} est nécessaire.
- Parmi quelles formes doit-on minimiser cette énergie ?

Introduction : la problématique $\mathcal{E}(\Omega^*) = \min_{\Omega \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}} \mathcal{E}(\Omega)$

- Quel type d'énergie élastique doit-on considérer ?

⇒ Une modélisation physique de \mathcal{E} est nécessaire.

- Parmi quelles formes doit-on minimiser cette énergie ?

⇒ Seront admissibles les surfaces qui sont "comme" la sphère :

$$\mathcal{A} = \{\Omega \subseteq \mathbb{R}^3, \partial\Omega \text{ est une surface régulière, sans bord, compacte, } \underbrace{\text{connexe, orientable et de genre nul}}_{\text{simplement connexe}}\}.$$

Introduction : la problématique $\mathcal{E}(\Omega^*) = \min_{\Omega \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}} \mathcal{E}(\Omega)$

- Quel type d'énergie élastique doit-on considérer ?

⇒ Une modélisation physique de \mathcal{E} est nécessaire.

- Parmi quelles formes doit-on minimiser cette énergie ?

⇒ Seront admissibles les surfaces qui sont "comme" la sphère :

$$\mathcal{A} = \{ \Omega \subseteq \mathbb{R}^3, \partial\Omega \text{ est une surface régulière, sans bord, compacte, } \underbrace{\text{connexe, orientable et de genre nul}}_{\text{simplement connexe}} \}.$$

- Quels sont les différentes contraintes à considérer ?

Introduction : la problématique $\mathcal{E}(\Omega^*) = \min_{\Omega \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}} \mathcal{E}(\Omega)$

- Quel type d'énergie élastique doit-on considérer ?

⇒ Une modélisation physique de \mathcal{E} est nécessaire.

- Parmi quelles formes doit-on minimiser cette énergie ?

⇒ Seront admissibles les surfaces qui sont "comme" la sphère :

$$\mathcal{A} = \{ \Omega \subseteq \mathbb{R}^3, \partial\Omega \text{ est une surface régulière, sans bord, compacte, } \underbrace{\text{connexe, orientable et de genre nul}}_{\text{simplement connexe}} \}.$$

- Quels sont les différentes contraintes à considérer ?

⇒ La surface de la membrane et le volume d'eau qu'elle contient:

$$\mathcal{C} = \{ \Omega \in \mathcal{A}, |\partial\Omega| = A_0 \text{ et } |\Omega| = V_0 \}.$$

Introduction

La modélisation physique

Quand la boule est-elle optimale ?
Sous contraintes d'aire et de volume
Conclusion

Présentation d'un modèle 2-D

Le modèle de Canham

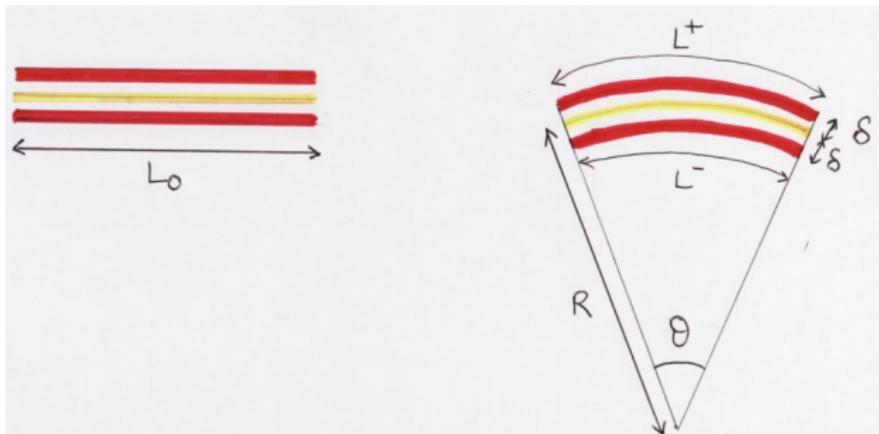
Le modèle de Helfrich

Vers une forme mathématique

La modélisation physique : présentation d'un modèle 2-D

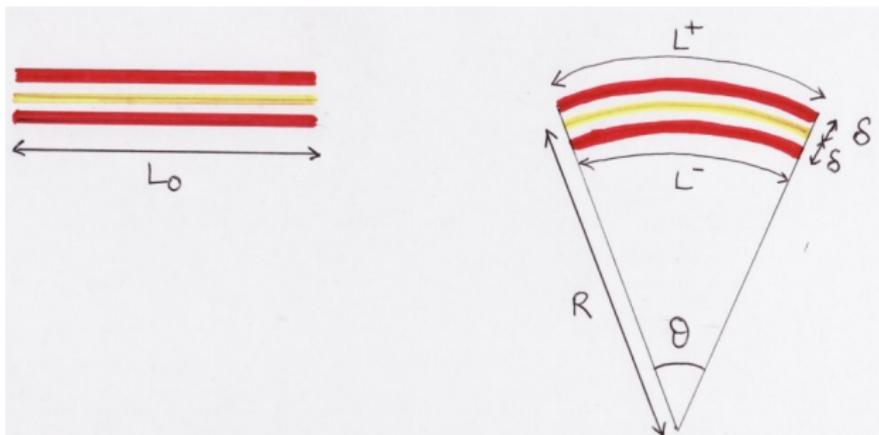
La modélisation physique : présentation d'un modèle 2-D

- Modélisons l'influence de la courbure en terme d'énergie.



La modélisation physique : présentation d'un modèle 2-D

- Modélisons l'influence de la courbure en terme d'énergie.



- **Problème** : les queues disposent de $L_0 = R\theta$ pour s'agencer alors que les têtes seulement de $L^\pm = (R \pm \delta)\theta$.

Introduction

La modélisation physique

Quand la boule est-elle optimale ?
Sous contraintes d'aire et de volume
Conclusion

Présentation d'un modèle 2-D

Le modèle de Canham

Le modèle de Helfrich

Vers une forme mathématique

La modélisation physique : présentation d'un modèle 2-D

La modélisation physique : présentation d'un modèle 2-D

- **Hypothèse** : la force F^\pm nécessaire pour comprimer/étirer les couches est celle d'un élastique c'est-à-dire

$$F^\pm = \nu \frac{d^\pm}{L_0}.$$

La modélisation physique : présentation d'un modèle 2-D

- **Hypothèse** : la force F^\pm nécessaire pour comprimer/étirer les couches est celle d'un élastique c'est-à-dire

$$F^\pm = \nu \frac{d^\pm}{L_0}.$$

- **Conséquence** : l'énergie E^\pm associée vaut alors

$$\begin{aligned} E^\pm &:= \frac{1}{2} F^\pm d^\pm = \nu \frac{(d^\pm)^2}{2L_0} = \nu \frac{(L^\pm - L_0)^2}{2L_0} \\ &= \nu \frac{(\delta\theta)^2}{2R\theta} = \underbrace{\nu \delta^2}_{:=k} \frac{\theta}{2R} = k \frac{L_0}{2R^2}. \end{aligned}$$

Introduction

La modélisation physique

Quand la boule est-elle optimale ?
Sous contraintes d'aire et de volume
Conclusion

Présentation d'un modèle 2-D

Le modèle de Canham

Le modèle de Helfrich

Vers une forme mathématique

La modélisation physique : présentation d'un modèle 2-D

La modélisation physique : présentation d'un modèle 2-D

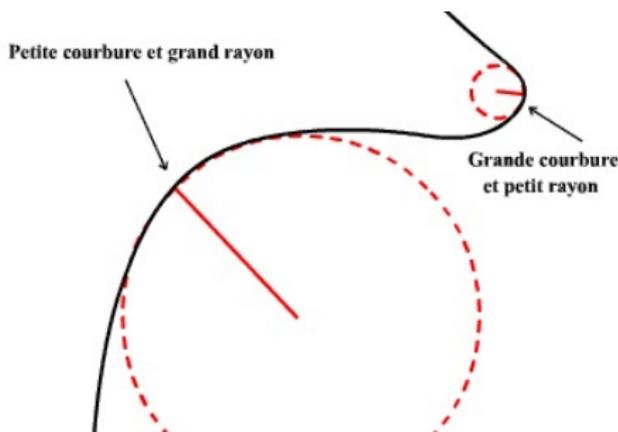
- **Conclusion** : l'énergie E d'une portion de membrane vaut

$$E = E^+ + E^- = k \frac{L_0}{R^2}$$

La modélisation physique : présentation d'un modèle 2-D

- Conclusion** : l'énergie E d'une portion de membrane vaut $E = E^+ + E^- = k \frac{L_0}{R^2}$ et l'énergie totale \mathcal{E} de la vésicule

$$\mathcal{E} := \int_{\text{membrane}} E = k \int_{\text{membrane}} \frac{L_0}{R^2} = k \int_{\text{membrane}} \kappa^2 ds.$$



Introduction

La modélisation physique

Quand la boule est-elle optimale ?
Sous contraintes d'aire et de volume
Conclusion

Présentation d'un modèle 2-D

Le modèle de Canham

Le modèle de Helfrich

Vers une forme mathématique

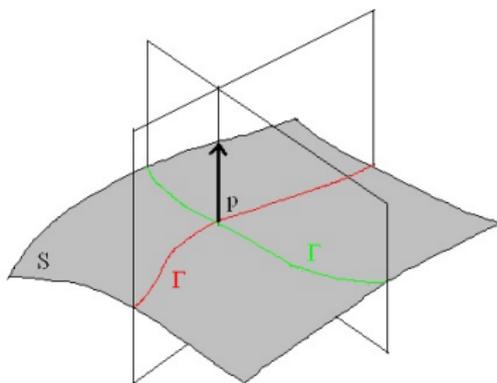
La modélisation physique : le modèle de Canham (1970)

La modélisation physique : le modèle de Canham (1970)

- Le raisonnement précédent se généralise dans l'espace.

La modélisation physique : le modèle de Canham (1970)

- Le raisonnement précédent se généralise dans l'espace.
- Remplacer la courbure $\kappa = \frac{1}{R}$ par la courbure moyenne H .



$$\left\{ \begin{array}{l} H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \\ K = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} \end{array} \right.$$

Introduction

La modélisation physique

Quand la boule est-elle optimale ?
Sous contraintes d'aire et de volume
Conclusion

Présentation d'un modèle 2-D

Le modèle de Canham

Le modèle de Helfrich

Vers une forme mathématique

La modélisation physique : le modèle de Helfrich (1973)

La modélisation physique : le modèle de Helfrich (1973)

La surface ainsi que le volume de fluide qu'elle contient étant imposés, une vésicule minimise l'énergie élastique suivante :

$$\mathcal{E} = k_b \int_{\text{membrane}} (H - c_0)^2 dS + k_g \int_{\text{membrane}} K dS.$$

La modélisation physique : le modèle de Helfrich (1973)

La surface ainsi que le volume de fluide qu'elle contient étant imposés, une vésicule minimise l'énergie élastique suivante :

$$\mathcal{E} = k_b \int_{\text{membrane}} (H - c_0)^2 dS + k_g \int_{\text{membrane}} K dS.$$

- dS représente l'élément de surface infinitésimal qu'on intègre.

La modélisation physique : le modèle de Helfrich (1973)

La surface ainsi que le volume de fluide qu'elle contient étant imposés, une vésicule minimise l'énergie élastique suivante :

$$\mathcal{E} = k_b \int_{\text{membrane}} (H - c_0)^2 dS + k_g \int_{\text{membrane}} K dS.$$

- dS représente l'élément de surface infinitésimal qu'on intègre.
- c_0 est une constante caractérisant l'asymétrie de la bicouche.

La modélisation physique : le modèle de Helfrich (1973)

La surface ainsi que le volume de fluide qu'elle contient étant imposés, une vésicule minimise l'énergie élastique suivante :

$$\mathcal{E} = k_b \int_{\text{membrane}} (H - c_0)^2 dS + k_g \int_{\text{membrane}} K dS.$$

- dS représente l'élément de surface infinitésimal qu'on intègre.
- c_0 est une constante caractérisant l'asymétrie de la bicouche.
- k_b et k_g sont deux autres constantes physiques fixées.

La modélisation physique : le modèle de Helfrich (1973)

La surface ainsi que le volume de fluide qu'elle contient étant imposés, une vésicule minimise l'énergie élastique suivante :

$$\mathcal{E} = k_b \int_{\text{membrane}} (H - c_0)^2 dS + k_g \int_{\text{membrane}} K dS.$$

- dS représente l'élément de surface infinitésimal qu'on intègre.
- c_0 est une constante caractérisant l'asymétrie de la bicouche.
- k_b et k_g sont deux autres constantes physiques fixées.

Théorème (de Gauss-Bonnet) Si la topologie (le genre g) de la classe \mathcal{A} est fixée, alors le second terme est constant :

$$\int K = 4\pi(1 - g).$$

Introduction

La modélisation physique

Quand la boule est-elle optimale ?

Sous contraintes d'aire et de volume

Conclusion

Présentation d'un modèle 2-D

Le modèle de Canham

Le modèle de Helfrich

Vers une forme mathématique

La modélisation physique : vers une forme mathématique

La modélisation physique : vers une forme mathématique

Question : le problème d'optimisation suivant possède-t-il un minimum ? A-t-on choisi la bonne énergie \mathcal{E} , classe d'objets \mathcal{A} ?

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}} \mathcal{E}(\Omega)$$

La modélisation physique : vers une forme mathématique

Question : le problème d'optimisation suivant possède-t-il un minimum ? A-t-on choisi la bonne énergie \mathcal{E} , classe d'objets \mathcal{A} ?

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}} \mathcal{E}(\Omega)$$

- $\mathcal{E} = \int (H - c_0)^2$

La modélisation physique : vers une forme mathématique

Question : le problème d'optimisation suivant possède-t-il un minimum ? A-t-on choisi la bonne énergie \mathcal{E} , classe d'objets \mathcal{A} ?

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}} \mathcal{E}(\Omega)$$

- $\mathcal{E} = \int (H - c_0)^2$
- $\mathcal{A} = \{\Omega \subseteq \mathbb{R}^3, \partial\Omega \simeq \mathbb{S}^2\}$

La modélisation physique : vers une forme mathématique

Question : le problème d'optimisation suivant possède-t-il un minimum ? A-t-on choisi la bonne énergie \mathcal{E} , classe d'objets \mathcal{A} ?

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}} \mathcal{E}(\Omega)$$

- $\mathcal{E} = \int (H - c_0)^2$
- $\mathcal{A} = \{\Omega \subseteq \mathbb{R}^3, \partial\Omega \simeq \mathbb{S}^2\}$
- $\mathcal{C} = \{\Omega \in \mathcal{A}, |\partial\Omega| = A_0 \quad \text{et} \quad |\Omega| = V_0\}$

Introduction

La modélisation physique

Quand la boule est-elle optimale ?

Sous contraintes d'aire et de volume

Conclusion

Le cas sans contrainte

Avec une contrainte d'aire

Avec une contrainte de volume

Sous contraintes d'aire et de volume

Le cas sans contrainte : $\Omega \in \mathcal{A}$

Le cas sans contrainte : $\Omega \in \mathcal{A}$

- La boule est une forme admissible. Quand est-elle optimale ?

Le cas sans contrainte : $\Omega \in \mathcal{A}$

- La boule est une forme admissible. Quand est-elle optimale ?

Proposition	Inégalité ($c_0 > 0$)	Cas d'égalité
Alexandrov (1962)	$\int (H - c_0)^2 \geq 0$	boule de rayon $\frac{1}{c_0}$
Willmore (1982)	$\int H^2 \geq 4\pi$	n'importe quelle boule
D. (2011)	$\int (H + c_0)^2 > 4\pi$	boule réduite à un point

Introduction

La modélisation physique

Quand la boule est-elle optimale ?

Sous contraintes d'aire et de volume

Conclusion

Le cas sans contrainte

Avec une contrainte d'aire

Avec une contrainte de volume

Sous contraintes d'aire et de volume

Avec une contrainte d'aire : $|\partial\Omega| = A_0$

Avec une contrainte d'aire : $|\partial\Omega| = A_0$

- Si la boule est un

minimum global minimum local point critique	pour $\int H$, alors c'est
---	-----------------------------
- aussi le cas pour $\mathcal{E} = \int H^2 + 2c_0 \int H + c_0 A_0$ quand $c_0 > 0$.

Avec une contrainte d'aire : $|\partial\Omega| = A_0$

- Si la boule est un $\left\{ \begin{array}{l} \text{minimum global} \\ \text{minimum local} \\ \text{point critique} \end{array} \right.$ pour $\int H$, alors c'est

aussi le cas pour $\mathcal{E} = \int H^2 + 2c_0 \int H + c_0 A_0$ quand $c_0 > 0$.

Proposition	Hypothèses	Inégalité	Cas d'égalité
Minkowski (1901)	convexe	$\int H \geq \sqrt{4\pi A_0}$	boule d'aire A_0
D. et al. (2012)	axi. + $z \nearrow$	$\int H \geq \sqrt{4\pi A_0}$	boule d'aire A_0
Conjecture	axisymétrique	$\int H > 0$	double-sphère
D. et al. (2012)	aucune	$\int H > -\infty$	boule trouée

Avec une contrainte d'aire : $|\partial\Omega| = A_0$

Avec une contrainte d'aire : $|\partial\Omega| = A_0$

- Etude de l'optimalité de la boule pour $\mathcal{E} = \int (H - c_0)^2$.

Paramètre $c_0 \sqrt{\frac{A_0}{4\pi}}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	1,46	6	
Minimum global	non ¹	?	oui	?	non ²	non
Minimum local	oui	oui	oui	?	?	non ³
Point critique	oui	oui	oui	oui	oui	oui

Avec une contrainte d'aire : $|\partial\Omega| = A_0$

- Etude de l'optimalité de la boule pour $\mathcal{E} = \int (H - c_0)^2$.

Paramètre $c_0 \sqrt{\frac{A_0}{4\pi}}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	1,46	6	
Minimum global	non ¹	?	oui	?	non ²	non
Minimum local	oui	oui	oui	?	?	non ³
Point critique	oui	oui	oui	oui	oui	oui



- La double-sphère fait strictement mieux que la boule.

Avec une contrainte d'aire : $|\partial\Omega| = A_0$

- Etude de l'optimalité de la boule pour $\mathcal{E} = \int (H - c_0)^2$.

Paramètre $c_0 \sqrt{\frac{A_0}{4\pi}}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	1,46	6
Minimum global	non ¹	?	oui	?	non ²
Minimum local	oui	oui	oui	?	?
Point critique	oui	oui	oui	oui	oui

- La double-sphère fait strictement mieux que la boule.
- Un cigare fait strictement mieux que la boule.



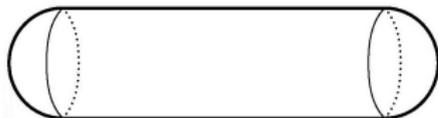
Avec une contrainte d'aire : $|\partial\Omega| = A_0$

- Etude de l'optimalité de la boule pour $\mathcal{E} = \int (H - c_0)^2$.

Paramètre $c_0 \sqrt{\frac{A_0}{4\pi}}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	1,46	6
Minimum global	non ¹	?	oui	?	non ²
Minimum local	oui	oui	oui	?	non ³
Point critique	oui	oui	oui	oui	oui



- 1 La double-sphère fait strictement mieux que la boule.
- 2 Un cigare fait strictement mieux que la boule.



- 3 Il existe une perturbation axisymétrique de la boule qui permet de faire strictement mieux que cette dernière.

Introduction

La modélisation physique

Quand la boule est-elle optimale ?

Sous contraintes d'aire et de volume

Conclusion

Le cas sans contrainte

Avec une contrainte d'aire

Avec une contrainte de volume

Sous contraintes d'aire et de volume

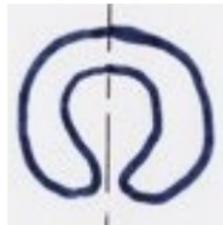
Avec une contrainte de volume : $|\Omega| = V_0$

Avec une contrainte de volume : $|\Omega| = V_0$

- Le minimum de $\int H^2$ est uniquement atteint par la boule.

Avec une contrainte de volume : $|\Omega| = V_0$

- Le minimum de $\int H^2$ est uniquement atteint par la boule.
- Quand $c_0 > 0$, c'est également vrai pour $\int (H + c_0)^2$ parmi les convexes ou les ouverts axisymétriques avec $z \nearrow$.



Introduction

La modélisation physique

Quand la boule est-elle optimale ?

Sous contraintes d'aire et de volume

Conclusion

Le cas sans contrainte

Avec une contrainte d'aire

Avec une contrainte de volume

Sous contraintes d'aire et de volume

Sous contraintes d'aire et de volume : $\Omega \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}$

Sous contraintes d'aire et de volume : $\Omega \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}$

Inégalité isopérimétrique : $A_0^2 \geq 36\pi V_0^3$ avec égalité si et seulement si c'est une boule.

Sous contraintes d'aire et de volume : $\Omega \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}$

Inégalité isopérimétrique : $A_0^2 \geq 36\pi V_0^3$ avec égalité si et seulement si c'est une boule.

Conséquence : le choix de A_0 et V_0 ne peut être arbitraire.

Sous contraintes d'aire et de volume : $\Omega \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}$

Inégalité isopérimétrique : $A_0^2 \geq 36\pi V_0^3$ avec égalité si et seulement si c'est une boule.

Conséquence : le choix de A_0 et V_0 ne peut être arbitraire.

- Si $A_0^2 < 36\pi V_0^3$, alors aucune surface n'est admissible : $\mathcal{C} = \emptyset$.

Sous contraintes d'aire et de volume : $\Omega \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}$

Inégalité isopérimétrique : $A_0^2 \geq 36\pi V_0^3$ avec égalité si et seulement si c'est une boule.

Conséquence : le choix de A_0 et V_0 ne peut être arbitraire.

- Si $A_0^2 < 36\pi V_0^3$, alors aucune surface n'est admissible : $\mathcal{C} = \emptyset$.
- Si $A_0^2 = 36\pi V_0^3$, alors la boule est l'unique forme admissible.

Sous contraintes d'aire et de volume : $\Omega \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}$

Inégalité isopérimétrique : $A_0^2 \geq 36\pi V_0^3$ avec égalité si et seulement si c'est une boule.

Conséquence : le choix de A_0 et V_0 ne peut être arbitraire.

- Si $A_0^2 < 36\pi V_0^3$, alors aucune surface n'est admissible : $\mathcal{C} = \emptyset$.
- Si $A_0^2 = 36\pi V_0^3$, alors la boule est l'unique forme admissible.
- Si $A_0^2 > 36\pi V_0^3$, ce qu'on va désormais supposer, alors la boule n'est plus une forme admissible.

Introduction

La modélisation physique

Quand la boule est-elle optimale ?

Sous contraintes d'aire et de volume

Conclusion

Stratégie pour démontrer l'existence

Les résultats d'existence à aire et volume fixés

Que dire pour les surfaces de genre $g \geq 1$?

La classe des ouverts vérifiant la condition d'épsilon-boule

Les différentes caractérisations possibles de la classe

Stratégie pour démontrer l'existence

Stratégie pour démontrer l'existence

- **Problème ouvert** : il existe une forme $\Omega^* \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}$ telle que

$$\mathcal{E}(\Omega^*) = \inf_{\Omega \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}} \mathcal{E}(\Omega).$$

Stratégie pour démontrer l'existence

- **Problème ouvert** : il existe une forme $\Omega^* \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}$ telle que

$$\mathcal{E}(\Omega^*) = \inf_{\Omega \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}} \mathcal{E}(\Omega).$$

- Il existe toujours une suite (Ω_i) d'éléments de $\mathcal{A} \cap \mathcal{C}$ telle que :

$$\mathcal{E}(\Omega_i) \longrightarrow \inf_{\Omega \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}} \mathcal{E}(\Omega).$$

Stratégie pour démontrer l'existence

- **Problème ouvert** : il existe une forme $\Omega^* \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}$ telle que

$$\mathcal{E}(\Omega^*) = \inf_{\Omega \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}} \mathcal{E}(\Omega).$$

- Il existe toujours une suite (Ω_i) d'éléments de $\mathcal{A} \cap \mathcal{C}$ telle que :

$$\mathcal{E}(\Omega_i) \longrightarrow \inf_{\Omega \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}} \mathcal{E}(\Omega).$$

- **Compacité** : existe-t-il une sous-suite $(\Omega_{\psi(i)}) \longrightarrow \Omega^*$?

Stratégie pour démontrer l'existence

- **Problème ouvert** : il existe une forme $\Omega^* \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}$ telle que

$$\mathcal{E}(\Omega^*) = \inf_{\Omega \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}} \mathcal{E}(\Omega).$$

- Il existe toujours une suite (Ω_i) d'éléments de $\mathcal{A} \cap \mathcal{C}$ telle que :

$$\mathcal{E}(\Omega_i) \longrightarrow \inf_{\Omega \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}} \mathcal{E}(\Omega).$$

- **Compacité** : existe-t-il une sous-suite $(\Omega_{\psi(i)}) \longrightarrow \Omega^*$?

\implies Il faut munir \mathcal{A} d'une topologie riche en compacts.

Stratégie pour démontrer l'existence

- **Problème ouvert** : il existe une forme $\Omega^* \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}$ telle que

$$\mathcal{E}(\Omega^*) = \inf_{\Omega \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}} \mathcal{E}(\Omega).$$

- Il existe toujours une suite (Ω_j) d'éléments de $\mathcal{A} \cap \mathcal{C}$ telle que :

$$\mathcal{E}(\Omega_j) \longrightarrow \inf_{\Omega \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}} \mathcal{E}(\Omega).$$

- **Compacité** : existe-t-il une sous-suite $(\Omega_{\psi(j)}) \longrightarrow \Omega^*$?

\implies Il faut munir \mathcal{A} d'une topologie riche en compacts.

- **Continuité** : a-t-on $\mathcal{E}(\Omega_{\psi(j)}) \longrightarrow \mathcal{E}(\Omega^*)$?

Stratégie pour démontrer l'existence

- **Problème ouvert** : il existe une forme $\Omega^* \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}$ telle que

$$\mathcal{E}(\Omega^*) = \inf_{\Omega \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}} \mathcal{E}(\Omega).$$

- Il existe toujours une suite (Ω_j) d'éléments de $\mathcal{A} \cap \mathcal{C}$ telle que :

$$\mathcal{E}(\Omega_j) \longrightarrow \inf_{\Omega \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}} \mathcal{E}(\Omega).$$

- **Compacité** : existe-t-il une sous-suite $(\Omega_{\psi(j)}) \longrightarrow \Omega^*$?

\implies Il faut munir \mathcal{A} d'une topologie riche en compacts.

- **Continuité** : a-t-on $\mathcal{E}(\Omega_{\psi(j)}) \longrightarrow \mathcal{E}(\Omega^*)$?

\implies Il faut munir \mathcal{A} d'une topologie ayant beaucoup d'ouverts.

Stratégie pour démontrer l'existence

- **Problème ouvert** : il existe une forme $\Omega^* \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}$ telle que

$$\mathcal{E}(\Omega^*) = \inf_{\Omega \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}} \mathcal{E}(\Omega).$$

- Il existe toujours une suite (Ω_j) d'éléments de $\mathcal{A} \cap \mathcal{C}$ telle que :

$$\mathcal{E}(\Omega_j) \longrightarrow \inf_{\Omega \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}} \mathcal{E}(\Omega).$$

- **Compacité** : existe-t-il une sous-suite $(\Omega_{\psi(j)}) \longrightarrow \Omega^*$?

⇒ Il faut munir \mathcal{A} d'une topologie riche en compacts.

- **Continuité** : a-t-on $\mathcal{E}(\Omega_{\psi(j)}) \longrightarrow \mathcal{E}(\Omega^*)$?

⇒ Il faut munir \mathcal{A} d'une topologie ayant beaucoup d'ouverts.

- **Régularité** : a-t-on $\Omega^* \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}$?

Stratégie pour démontrer l'existence

- **Problème ouvert** : il existe une forme $\Omega^* \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}$ telle que

$$\mathcal{E}(\Omega^*) = \inf_{\Omega \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}} \mathcal{E}(\Omega).$$

- Il existe toujours une suite (Ω_j) d'éléments de $\mathcal{A} \cap \mathcal{C}$ telle que :

$$\mathcal{E}(\Omega_j) \longrightarrow \inf_{\Omega \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}} \mathcal{E}(\Omega).$$

- **Compacité** : existe-t-il une sous-suite $(\Omega_{\psi(j)}) \longrightarrow \Omega^*$?

⇒ Il faut munir \mathcal{A} d'une topologie riche en compacts.

- **Continuité** : a-t-on $\mathcal{E}(\Omega_{\psi(j)}) \longrightarrow \mathcal{E}(\Omega^*)$?

⇒ Il faut munir \mathcal{A} d'une topologie ayant beaucoup d'ouverts.

- **Régularité** : a-t-on $\Omega^* \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}$?

⇒ C'est un problème difficile car Ω^* n'est pas régulier a priori !

Les résultats d'existence à aire et volume fixés

Les résultats d'existence à aire et volume fixés

- Rivière (1998) a étudié les points critiques pour $\int H^2$.

Les résultats d'existence à aire et volume fixés

- Rivière (1998) a étudié les points critiques pour $\int H^2$.
- Nagasawa (2003) a fait de même pour l'énergie de Helfrich.

Les résultats d'existence à aire et volume fixés

- Rivière (1998) a étudié les points critiques pour $\int H^2$.
- Nagasawa (2003) a fait de même pour l'énergie de Helfrich.

Proposition	Classe	Energie considérée
Belletini et al. (1993)	le cas 2-D	$\int \kappa ^p$ avec $p > 1$
Choksi et al. (2012)	axisymétrique	$k_b \int (H - c_0)^2 + k_g \int K$
Schygulla (2011)	\mathcal{A}	$\int H^2$
D. (2013)	$\mathcal{O}_{B,\varepsilon}$	$\int (H - c_0)^2$

Que dire pour les surfaces de genre $g \geq 1$?

- La conjecture de Willmore est résolue par Marques et Neves en 2002:

$$\int_{\Sigma} H^2 \geq 2\pi^2,$$

pour toute surface Σ de genre un, avec égalité si et seulement si Σ est la projection stéréographique du tore de Clifford.

Que dire pour les surfaces de genre $g \geq 1$?

- La conjecture de Willmore est résolue par Marques et Neves en 2002:

$$\int_{\Sigma} H^2 \geq 2\pi^2,$$

pour toute surface Σ de genre un, avec égalité si et seulement si Σ est la projection stéréographique du tore de Clifford.

Existence	Classe	Contraintes	Energie
Simon (1993)	genre $g = 1$	Aucune	$\int H^2$
Bauer and al. (2002)	genre $g \geq 1$	Aucune	$\int H^2$
Keller and al. (2014)	genre $g \geq 1$	Isopérimètre	$\int H^2$

Introduction

La modélisation physique

Quand la boule est-elle optimale ?

Sous contraintes d'aire et de volume

Conclusion

Stratégie pour démontrer l'existence

Les résultats d'existence à aire et volume fixés

Que dire pour les surfaces de genre $g \geq 1$?

La classe des ouverts vérifiant la condition d'epsilon-boule

Les différentes caractérisations possibles de la classe

La classe $\mathcal{O}_{B,\varepsilon}$ des ouverts vérifiant la condition d' ε -boule

La classe $\mathcal{O}_{B,\varepsilon}$ des ouverts vérifiant la condition d' ε -boule

- Une classe plus raisonnable assurant l'existence.

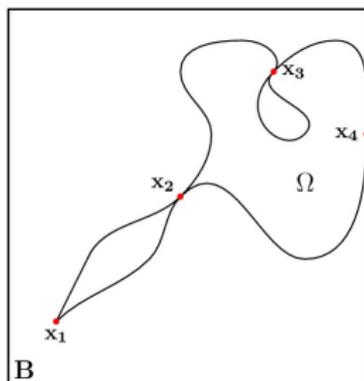
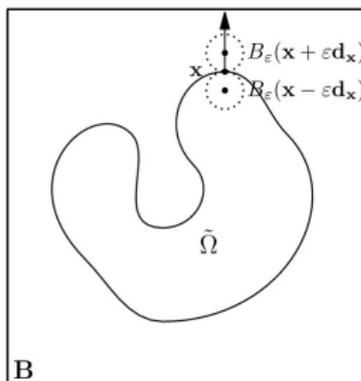
La classe $\mathcal{O}_{B,\varepsilon}$ des ouverts vérifiant la condition d' ε -boule

- Une classe plus raisonnable assurant l'existence.
- Elle modélise aussi l'effet du squelette sur le globule rouge.

La classe $\mathcal{O}_{B,\varepsilon}$ des ouverts vérifiant la condition d' ε -boule

- Une classe plus raisonnable assurant l'existence.
- Elle modélise aussi l'effet du squelette sur le globule rouge.
- Fixons $\varepsilon > 0$ et $B \in \mathcal{A}$. Quand $\Omega \subseteq B$, on écrit $\Omega \in \mathcal{O}_{B,\varepsilon}$ si :

$$\forall \mathbf{x} \in \partial\Omega, \exists \mathbf{d}_{\mathbf{x}} \in \mathbb{S}^2, \begin{cases} B_{\varepsilon}(\mathbf{x} - \varepsilon \mathbf{d}_{\mathbf{x}}) \subseteq \Omega \\ B_{\varepsilon}(\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{d}_{\mathbf{x}}) \subseteq B \setminus \bar{\Omega}. \end{cases}$$



Les différentes caractérisations possibles de la classe $\mathcal{O}_{B,\varepsilon}$

Les différentes caractérisations possibles de la classe $\mathcal{O}_{B,\varepsilon}$

Théorème (Jordan-Brouwer) Si \mathcal{S} est une surface topologique telle que $\mathcal{S} \subseteq B$, alors il existe un ouvert $\Omega \subseteq B$ tel que $\partial\Omega = \mathcal{S}$.

Les différentes caractérisations possibles de la classe $\mathcal{O}_{B,\varepsilon}$

Théorème (Jordan-Brouwer) Si \mathcal{S} est une surface topologique telle que $\mathcal{S} \subseteq B$, alors il existe un ouvert $\Omega \subseteq B$ tel que $\partial\Omega = \mathcal{S}$.

Ω vérifie la condition d' ε -boule pour un certain réel $\varepsilon > 0$;



$\partial\Omega$ est de reach positif $R(\varepsilon) > 0$ au sens de Federer (1959) ;



\mathcal{S} est une hypersurface de \mathbb{R}^n plus régulière, de classe $C^{1,1}$.

Les différentes caractérisations possibles de la classe $\mathcal{O}_{B,\varepsilon}$

Théorème (Jordan-Brouwer) Si \mathcal{S} est une surface topologique telle que $\mathcal{S} \subseteq B$, alors il existe un ouvert $\Omega \subseteq B$ tel que $\partial\Omega = \mathcal{S}$.

Ω vérifie la condition d' ε -boule pour un certain réel $\varepsilon > 0$;



$\partial\Omega$ est de reach positif $R(\varepsilon) > 0$ au sens de Federer (1959) ;



\mathcal{S} est une hypersurface de \mathbb{R}^n plus régulière, de classe $C^{1,1}$.

Les différentes caractérisations possibles de la classe $\mathcal{O}_{B,\varepsilon}$

Théorème (Jordan-Brouwer) Si \mathcal{S} est une surface topologique telle que $\mathcal{S} \subseteq B$, alors il existe un ouvert $\Omega \subseteq B$ tel que $\partial\Omega = \mathcal{S}$.

Ω vérifie la condition d' ε -boule pour un certain réel $\varepsilon > 0$;



$\partial\Omega$ est de reach positif $R(\varepsilon) > 0$ au sens de Federer (1959) ;



\mathcal{S} est une hypersurface de \mathbb{R}^n plus régulière, de classe $C^{1,1}$.

- $\partial\Omega$ satisfait la propriété du $\alpha(\varepsilon)$ -cône selon Chenaïs (1975).

Les différentes caractérisations possibles de la classe $\mathcal{O}_{B,\varepsilon}$

Théorème (Jordan-Brouwer) Si \mathcal{S} est une surface topologique telle que $\mathcal{S} \subseteq B$, alors il existe un ouvert $\Omega \subseteq B$ tel que $\partial\Omega = \mathcal{S}$.

Ω vérifie la condition d' ε -boule pour un certain réel $\varepsilon > 0$;



$\partial\Omega$ est de reach positif $R(\varepsilon) > 0$ au sens de Federer (1959) ;



\mathcal{S} est une hypersurface de \mathbb{R}^n plus régulière, de classe $C^{1,1}$.

- $\partial\Omega$ satisfait la propriété du $\alpha(\varepsilon)$ -cône selon Chenaïs (1975).
- \mathbf{d}_x est la normale unitaire extérieure à $\partial\Omega$ en chaque point \mathbf{x} .

Les différentes caractérisations possibles de la classe $\mathcal{O}_{B,\varepsilon}$

Théorème (Jordan-Brouwer) Si \mathcal{S} est une surface topologique telle que $\mathcal{S} \subseteq B$, alors il existe un ouvert $\Omega \subseteq B$ tel que $\partial\Omega = \mathcal{S}$.

Ω vérifie la condition d' ε -boule pour un certain réel $\varepsilon > 0$;



$\partial\Omega$ est de reach positif $R(\varepsilon) > 0$ au sens de Federer (1959) ;



\mathcal{S} est une hypersurface de \mathbb{R}^n plus régulière, de classe $C^{1,1}$.

- $\partial\Omega$ satisfait la propriété du $\alpha(\varepsilon)$ -cône selon Chenaïs (1975).
- \mathbf{d}_x est la normale unitaire extérieure à $\partial\Omega$ en chaque point \mathbf{x} .
- l'application de Gauss $\mathbf{d} : \mathbf{x} \in \partial\Omega \mapsto \mathbf{d}_x$ est $L(\varepsilon)$ -lipschitzienne.

Conclusion : récapitulatifs des résultats

Conclusion : récapitulatifs des résultats

- Sans contrainte, le problème est maintenant résolu.

Conclusion : récapitulatifs des résultats

- Sans contrainte, le problème est maintenant résolu.
- Sous contrainte d'aire, l'optimalité (ou non) de la boule est un phénomène plutôt bien compris.

Conclusion : récapitulatifs des résultats

- Sans contrainte, le problème est maintenant résolu.
- Sous contrainte d'aire, l'optimalité (ou non) de la boule est un phénomène plutôt bien compris.
- Sous contrainte de volume, on ne sait quasiment rien dire : le problème de l'existence est même ouvert en 2-D.

Conclusion : récapitulatifs des résultats

- Sans contrainte, le problème est maintenant résolu.
- Sous contrainte d'aire, l'optimalité (ou non) de la boule est un phénomène plutôt bien compris.
- Sous contrainte de volume, on ne sait quasiment rien dire : le problème de l'existence est même ouvert en 2-D.
- La classe $\mathcal{O}_{B,\varepsilon}$ permet de garantir l'existence de minima pour les fonctionnelles de formes géométriques d'ordre deux.

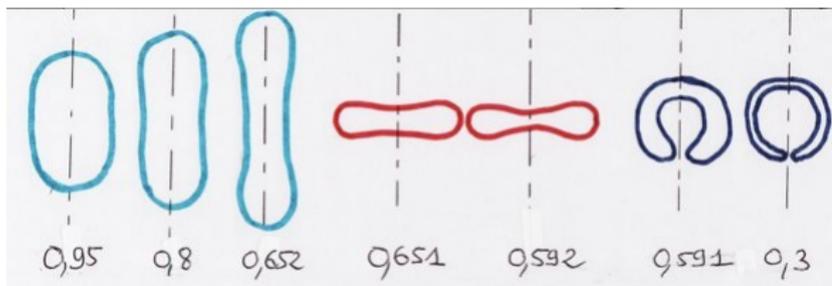
Conclusion : récapitulatifs des résultats

- Sans contrainte, le problème est maintenant résolu.
- Sous contrainte d'aire, l'optimalité (ou non) de la boule est un phénomène plutôt bien compris.
- Sous contrainte de volume, on ne sait quasiment rien dire : le problème de l'existence est même ouvert en 2-D.
- La classe $\mathcal{O}_{B,\varepsilon}$ permet de garantir l'existence de minima pour les fonctionnelles de formes géométriques d'ordre deux.
- Dans le cas général où $c_0 \neq 0$, cela reste un problème ouvert.

Conclusion : l'aspect numérique

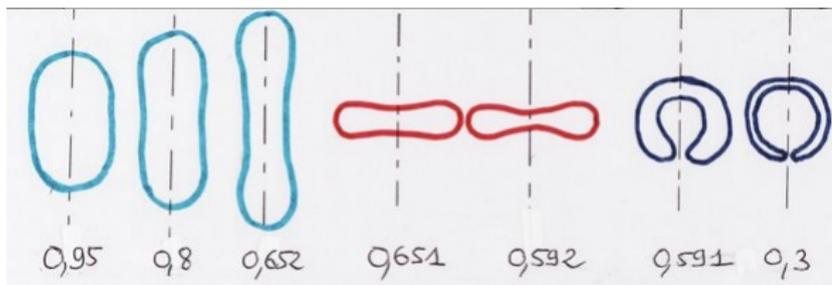
Conclusion : l'aspect numérique

- Seifert (1997) a simulé les formes axisymétriques optimales en fonction des paramètres grâce à une EDO.



Conclusion : l'aspect numérique

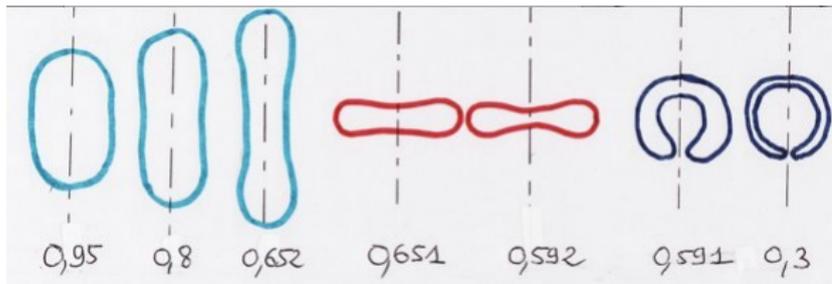
- Seifert (1997) a simulé les formes axisymétriques optimales en fonction des paramètres grâce à une EDO.



- Dans le cas général, les minima locaux sont calculés par une méthode de MonteCarlo.

Conclusion : l'aspect numérique

- Seifert (1997) a simulé les formes axisymétriques optimales en fonction des paramètres grâce à une EDO.



- Dans le cas général, les minima locaux sont calculés par une méthode de MonteCarlo.
- Une communauté importante travaille sur la meilleure façon de simuler ce type d'objets géométriques (Oudet, Bretin).

Conclusion : perspectives

Conclusion : perspectives

- On va commencer à s'intéresser à l'aspect numérique et ses problèmes prochainement.

Conclusion : perspectives

- On va commencer à s'intéresser à l'aspect numérique et ses problèmes prochainement.
- A part l'existence, aucune autre propriété (symétrie) du minimum n'a été obtenue.

Conclusion : perspectives

- On va commencer à s'intéresser à l'aspect numérique et ses problèmes prochainement.
- A part l'existence, aucune autre propriété (symétrie) du minimum n'a été obtenue.
- Beaucoup de chercheurs dans différents domaines travaillent sur ce passionnant sujet.

Conclusion : perspectives

- On va commencer à s'intéresser à l'aspect numérique et ses problèmes prochainement.
 - A part l'existence, aucune autre propriété (symétrie) du minimum n'a été obtenue.
 - Beaucoup de chercheurs dans différents domaines travaillent sur ce passionnant sujet.
- + Un résultat intéressera beaucoup de monde.

Conclusion : perspectives

- On va commencer à s'intéresser à l'aspect numérique et ses problèmes prochainement.
 - A part l'existence, aucune autre propriété (symétrie) du minimum n'a été obtenue.
 - Beaucoup de chercheurs dans différents domaines travaillent sur ce passionnant sujet.
- + Un résultat intéressera beaucoup de monde.
- Résoudre le problème général est difficile.

Conclusion: questions

- Merci pour votre attention, avez-vous des questions ?

