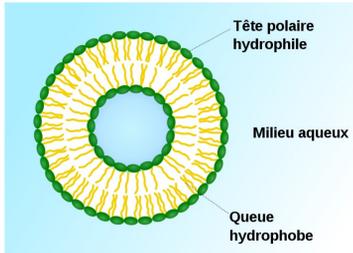
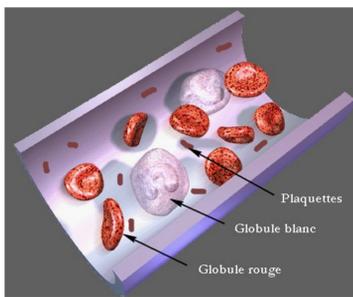


Introduction

En biologie, lorsqu'un nombre suffisant de phospholipides est inséré dans un milieu aqueux, ces derniers s'assemblent alors par paires pour former une bicouche, aussi appelée vésicule. Une vésicule représente donc simplement un sac de fluide, lui-même plongé dans un fluide.



Dépourvu de noyau chez les mammifères, le globule rouge est un exemple de vésicule à laquelle est fixée un réseau de protéines jouant le rôle de squelette. Il est présent dans le sang et assure l'acheminement au sein de l'organisme des gaz respiratoires comme l'oxygène.

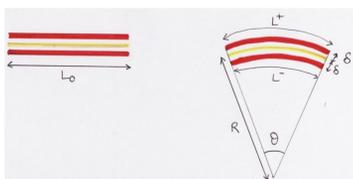


Cette thèse s'intéresse aux problèmes théoriques posés par la forme des vésicules: celle-ci est la solution d'un problème d'optimisation. Elle minimise une certaine énergie élastique sous diverses contraintes: la surface de la membrane et le volume de fluide qu'elle contient.

1 Le modèle physique

1.1 Présentation d'un modèle 2-D

On cherche à modéliser l'effet de la courbure sur l'énergie associée à une vésicule. La figure ci-dessous représente un morceau de membrane rectiligne et celui-ci une fois courbé, les segments rouges (jaunes) désignant la place disponible pour les têtes (queues) des molécules.



Si L_0 est assez petit, les segments deviennent trois arcs de cercle de même centre et angle θ . Sur la membrane courbée, il n'est alors plus possible de satisfaire tout le monde: les têtes disposent de la longueur $L^\pm = (R \pm \delta)\theta$ pour s'agencer tandis que les queues de $L_0 = R\theta$.

Si l'énergie mécanique E^\pm de chaque couche varie comme celle d'un élastique, alors la force nécessaire pour allonger de d^\pm un segment de longueur L_0 vaut $F^\pm = \frac{\kappa d^\pm}{L_0}$ où κ est une constante fixée (la raideur):

$$E^\pm = \frac{1}{2} F^\pm d^\pm = \frac{\kappa (d^\pm)^2}{2L_0} = \frac{\kappa (L^\pm - L_0)^2}{2L_0} = \frac{\kappa \delta^2 \theta}{2R} = \frac{\kappa \delta^2}{2R^2} L_0$$

Ainsi, l'énergie d'une portion de membrane vaut $E^+ + E^- = \frac{kL_0}{R^2}$ et en sommant toutes les contributions de longueur infinitésimale L_0 , l'énergie totale de la vésicule s'exprime sous forme d'une intégrale:

$$\mathcal{E} = k \int_{\text{membrane}} \frac{L_0}{R^2}$$

1.2 Le modèle de Helfrich

Le raisonnement précédent se généralise dans l'espace en remplaçant $\frac{1}{R}$ par la courbure moyenne $H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. C'est Canham qui modélise ainsi les globules rouges en 1970. Puis en 1973, Helfrich propose son modèle de vésicules, membranes de base à toutes cellules du vivant.

La surface ainsi que le volume de fluide qu'elle contient étant imposés, la forme prise par une vésicule minimise l'énergie élastique suivante:

$$\mathcal{E} = k_b \int_{\text{membrane}} (H - c_0)^2 dS + k_g \int_{\text{membrane}} K dS$$

où dS représente l'élément de surface infinitésimal, K la courbure gaussienne, c_0 une constante caractérisant l'asymétrie de la bicouche, k_b et k_g deux autres réels fixés. D'après le théorème de Gauss-Bonnet, le second terme est constant si la topologie (le genre g) est donnée:

$$\int K dS = 4\pi(1 - g).$$

2 Quand la boule est-elle optimale?

On cherche ici à établir les cas où la boule minimise la fonctionnelle:

$$W_\varepsilon(\Omega) = \int_{\partial\Omega} (H + \varepsilon c_0)^2 dS$$

où $\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}$, $H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$ désigne la courbure moyenne, $c_0 > 0$ un réel désormais fixé et dS l'élément de surface infinitésimal qui correspond à une intégration vis-à-vis de la 2-mesure de Hausdorff.

L'application W_ε est définie sur l'ensemble \mathcal{A} des formes admissibles: il s'agit des ouverts Ω de l'espace \mathbb{R}^3 dont le bord $\partial\Omega$ est une surface très régulière (de classe C^∞) ayant la même topologie que la sphère (sans bord, connexe, compacte, orientable et de genre nul).

2.1 Le cas sans contrainte: $\Omega \in \mathcal{A}$

Dès 1929, Blaschke remarque que l'énergie $\int H^2$ est invariante par transformation conforme (translation, homothétie et inversion) mais elle porte aujourd'hui le nom de Willmore car celui-ci établit en 1982:

$$\forall \Omega \in \mathcal{A}, \int_{\partial\Omega} H^2 dS \geq 4\pi$$

avec égalité si et seulement si $\partial\Omega$ est une sphère.

On remarque que $\int (H + c_0)^2 \geq \int_{H \geq 0} (H + c_0)^2 > \int_{H \geq 0} H^2 \geq 4\pi$ par des arguments similaires à ceux de Willmore. Puis, on observe que l'énergie d'une boule dont le rayon devient nul tend vers 4π . L'infimum de $\int (H + c_0)^2$ n'est donc pas atteint et vaut 4π .

Le minimum de $\int (H - c_0)^2$ vaut zéro et il est uniquement atteint pour la boule de rayon $\frac{1}{c_0}$ (utiliser le théorème d'Alexandrov).

2.2 Avec une contrainte d'aire: $|\partial\Omega| = A_0$

D'après le théorème de Willmore qui précède, le minimum de $\int H^2$ vaut 4π et il est uniquement atteint pour la boule d'aire A_0 .

De plus, si elle minimise $\int H$, alors c'est aussi le cas de $\int (H + c_0)^2$. C'est notamment vrai parmi les convexes. En effet, Minkowski établit grâce aux formules de Steiner et à l'inégalité isopérimétrique:

$$\forall \Omega \in \mathcal{A} \text{ convexe}, \int_{\partial\Omega} H dS \geq \sqrt{4\pi |\partial\Omega|}$$

avec égalité si et seulement si $\partial\Omega$ est une sphère. C'est encore vérifié pour les ouverts axisymétriques et convexes dans la direction de l'axe. On s'est ramené au cas convexe par un réarrangement de fonction.

Mais l'inégalité est fautive pour les ouverts axisymétriques car $\int H$ devient nul quand on est proche de la double sphère dont on conjecture que c'est l'infimum i.e. $\int H \geq 0$. Dans le cas général, il vaut $-\infty$: considérer une sphère remplie de trous sphériques au rayon adapté.

On a montré que la boule d'aire A_0 est point critique pour $\int H$ et $\int (H + c_0)^2$. Comme la perturbation d'un convexe stricte le demeure, c'est également un minimum local mais qui n'est pas toujours global: la double-sphère fait strictement mieux lorsque $\tilde{c}_0 = c_0(\frac{A_0}{4\pi})^{\frac{1}{2}} > \frac{1}{2}$.

Quant à $\int (H - c_0)^2$, la boule est point critique de la même manière. Par Cauchy-Schwarz, c'est un minimum global si $\tilde{c}_0 \in]0, 1]$ mais ne l'est plus dès que $\tilde{c}_0 \gtrsim 1.46$, même parmi les convexes (le cigare). L'étude du cas axisymétrique la rend minimum local si $\tilde{c}_0 \in]0, 6]$.

2.3 Avec une contrainte de volume: $|\Omega| = V_0$

D'après ce qui précède, le minimum de $\int H^2$ vaut 4π et il est atteint uniquement pour la boule de volume V_0 . L'inégalité isopérimétrique nous assure qu'elle minimise aussi $\int (H + c_0)^2$ parmi les convexes ou les ouverts axisymétriques et convexes en direction de l'axe ($z \nearrow$).

Il n'est pas clair qu'on puisse contrôler l'aire d'une suite minimisante grâce à V_0 et $\int (H \pm c_0)^2$, étape souvent indispensable à la compacité puisqu'on a notamment: $\exists C > 0, \forall \Omega \in \mathcal{A}, (\text{diam}\Omega)^2 \leq C |\partial\Omega| \int H^2$. Une piste consisterait à estimer $\int |H|$ car Simon montre en 1973 que:

$$\forall \Omega \in \mathcal{A}, \int_{\partial\Omega} |H| dS \geq \sqrt{C |\partial\Omega|}$$

où $C = \frac{\pi}{2}$ n'est pas optimale (problème ouvert). On conjecture que la meilleure constante est atteinte uniquement pour la boule.

2.4 Avec deux contraintes: l'aire et le volume

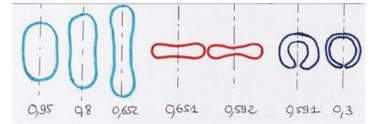
Par invariance conforme de $\int H^2$, cela revient à imposer $I_0 = \frac{A_0^3}{36\pi V_0^2}$ le ratio isopérimétrique, et en 2011, Schygulla montre qu'un minimum existe dans la classe \mathcal{A} si $I_0 \in [0, 1]$. Il déforme un caténoïde inversé, obtient $\int H^2 < 8\pi$ et utilise les techniques de régularité de Simon.

Rivière a étudié les points critiques de $\int H^2$ et développé un point de vue novateur: celui des déformations de la sphère (immersions). Il établit des théorèmes de régularité-compacité dans une classe très générale et classe les pathologies qui peuvent survenir pour $\int H^2$.

$\int (H \pm c_0)^2$ n'étant plus inv. par transf. conf. ni même semi-continue inf. au sens des varifolds, il faut plutôt considérer l'énergie de Helfrich. En 2012, Choksi et al. montrent que \mathcal{E} a un minimum dans une classe axisymétrique générée par des courbes, se ramenant ainsi au cas 2D.

3 Existence dans la classe des ε -boules

Comme souvent en calcul des variations, \mathcal{A} est une classe trop petite pour avoir continuité/compacité d'une suite minimisante de \mathcal{E} , ce qui permet au contraire la classe plus générale des varifolds orientés. Mais si la régularité du courant limite est résolue dans le plan par Bellettini et al. en 1993, ce problème difficile reste ouvert dans l'espace, et donc celui de l'existence d'une surface minimisant \mathcal{E} à aire et volume fixé.

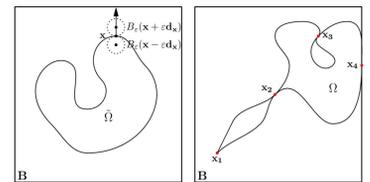


Ainsi, on a introduit une classe $\mathcal{O}_{B,\varepsilon}$ plus raisonnable pour laquelle l'existence d'un minimum est assurée pour des fonctionnelles générales faisant intervenir les propriétés d'ordre deux du bord, généralisant les travaux de Chenaï sur la propriété de cône uniforme en 1975.

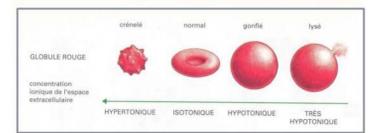
Soit un réel $\varepsilon > 0$ et un ouvert $B \in \mathcal{A}$. Quand il est inclus dans B , on écrit $\Omega \in \mathcal{O}_{B,\varepsilon}$ et on dit qu'il vérifie la condition dite d' ε -boule si:

$$\forall \mathbf{x} \in \partial\Omega, \exists \mathbf{d}_\mathbf{x} \in \mathbb{S}^2, \begin{cases} B_\varepsilon(\mathbf{x} - \varepsilon \mathbf{d}_\mathbf{x}) \subseteq \Omega \\ B_\varepsilon(\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{d}_\mathbf{x}) \subseteq B \setminus \bar{\Omega} \end{cases}$$

Sur la figure ci-dessous est représenté à gauche un ouvert $\tilde{\Omega}$ vérifiant la condition d' ε -boule tandis qu'à droite, l'ouvert Ω ne la satisfait pas.



Le choix d'une telle classe peut aussi être justifié physiquement par le fait qu'un globule rouge est une vésicule dotée d'un squelette, ce qui interdit à cette dernière de trop se courber, répartissant globalement la surcharge de courbure locale le cas échéant (cf. figure ci-dessous).



3.1 Caractérisations de la classe des ε -boules

Si $\Omega \in \mathcal{O}_{B,\varepsilon}$, alors son bord $\partial\Omega$ est une $C^{1,1}$ -surface au sens suivant:

- $\partial\Omega$ vérifie la propriété du α -cône où α ne dépend que de ε , ce qui est équivalent au fait que Ω soit un ouvert lipschitzien (Chenaï);
- $\mathbf{d}_\mathbf{x}$ n'est autre que la normale extérieure à $\partial\Omega$ en chaque point \mathbf{x} ;
- l'application de Gauss $\mathbf{d} : \mathbf{x} \in \partial\Omega \rightarrow \mathbf{d}_\mathbf{x}$ est aussi $\frac{1}{\varepsilon}$ -lipschitzienne.

Réciproquement, si Ω est un ouvert inclus dans B dont le bord est une surface de classe $C^{1,1}$, l'application de Gauss étant L -lipschitzienne, alors il existe un réel $\varepsilon > 0$ ne dépendant que L tel que $\Omega \in \mathcal{O}_{B,\varepsilon}$.

Or, une C^0 -surface fermée \mathcal{S} (l'image de \mathbb{S}^2 par homéomorphisme) est de classe $C^{1,1}$ si et seulement si elle est de reach positif au sens où Federer le définit en 1959. De plus, le théorème de Jordan-Brouwer nous assure qu'il existe toujours un ouvert borné Ω tel que $\partial\Omega = \mathcal{S}$.

On en déduit que si $\Omega \in \mathcal{O}_{B,\varepsilon}$, alors $\partial\Omega$ est une $C^{1,1}$ -surface de reach positif ne dépendant que de ε , et réciproquement, si \mathcal{S} est une C^0 -surface fermée de reach positif, alors il existe $B \in \mathcal{A}$, $\varepsilon > 0$ ne dépendant que du reach ainsi que $\Omega \in \mathcal{O}_{B,\varepsilon}$ tels que $\mathcal{S} = \partial\Omega$.

3.2 Compacité de la classe des ε -boule

Soit $(\Omega_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{O}_{B,\varepsilon}$. Il existe $\Omega \in \mathcal{O}_{B,\varepsilon}$ telle qu'une sous-suite notée $(\Omega'_i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge vers Ω au sens de Hausdorff, des fonctions caractéristiques et des compacts. De plus, les suites $(\bar{\Omega}'_i)$ et $(\partial\Omega'_i)$ convergent vers $\bar{\Omega}$ et $\partial\Omega$ pour la distance de Hausdorff.

Soit $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$ fixé. Quitte à extraire de nouveau, il existe un repère orthonormé direct centré en \mathbf{x}_0 dans lequel chaque $\partial\Omega'_i$ se représente comme le graphe d'une $C^{1,1}$ -application $\varphi_i : D_r \rightarrow]-\varepsilon, \varepsilon[$. De plus, sur tout compact $K \subseteq D_r$, $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers φ et $(\nabla\varphi_i)$ vers $\nabla\varphi$. On obtient aussi la convergence $L^\infty(K)$ -faible-* des coefficients des matrices hessiennes $(D^2\varphi_i)$ vers ceux de $D^2\varphi$.

3.3 Minimiser dans la classe des ε -boule

On montre qu'il existe un minimum dans la classe $\mathcal{O}_{B,\varepsilon}$ pour des énergies du type $\int_{\partial\Omega} F(u_\Omega, \nabla u_\Omega, n, H, K) dS$ sous des contraintes faisant intervenir le même type de quantité que la fonctionnelle comme l'aire, le volume, le genre, $\int H$, et sous réserve que F soit continue en les trois premières variables, convexes en les deux dernières, avec u_Ω la solution d'une équation aux dérivées partielles du type:

$$\begin{cases} u_\Omega = f & \text{dans } \Omega \\ \alpha u_\Omega + \beta \frac{\partial u_\Omega}{\partial n} = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

En particulier, un minimum existe pour \mathcal{E} ou W_ε dans la classe $\mathcal{O}_{B,\varepsilon}$ sous contrainte d'aire et de volume, W_0 et A_0 contrôlant le diamètre.