

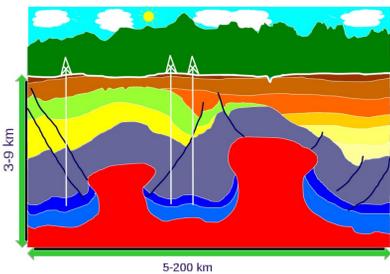
## Introduction

Au cours des Semaines d'Etude Maths-Entreprises, de futurs jeunes chercheurs en mathématiques se réunissent durant une semaine autour de sujets divers proposés par des entreprises afin d'entamer un début de réflexion collective, à l'initiative de l'AMIES et du CNRS.



Dans ce poster, il s'agit du consortium GOCAD, regroupant de nombreux industriels pétroliers et miniers qui cherchent à reconstituer efficacement le sous-sol terrestre alors qu'ils ne disposent souvent que de données discrètes éparées obtenues lors de forages par exemple.

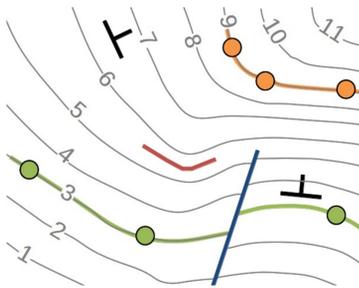
En effet, une connaissance précise du sous-sol constituent de véritables enjeux économiques, en particulier au sein de l'industrie pétrolière et minière, car elles assurent aux entreprises concernées la gestion adéquate des ressources naturelles et des risques associés.



Cependant, les informations nécessaires pour modéliser la géométrie des couches géologiques sont essentiellement disponibles sous forme discrète: il s'agit de points, d'orientations ou de lignes. Il y a aussi des failles dont le traitement numérique s'avère assez délicat.

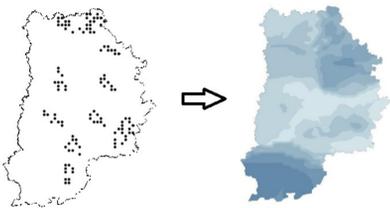
Une modélisation mathématique possible de ce problème consiste à assimiler les strates géologiques aux équipotentielles d'un champ scalaire. Les mesures des forages se traduisent par des contraintes ponctuelles (valeurs imposées) mais aussi vectorielles (gradients).

Les informations risquent d'être très concentrées sur de petites zones du domaine d'étude alors qu'il faut être capable de reconstituer le champ loin des données connues. Une autre complication est liée à la gestion des failles qui induisent une discontinuité des équipotentielles.

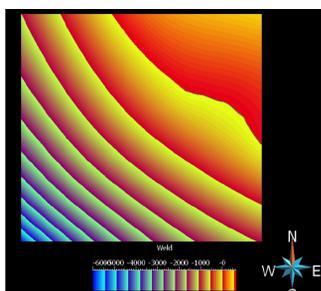


## 1 Trois méthodes de reconstruction

Un état de l'art a d'abord été effectué sur les méthodes récemment développées pour reconstruire le sous-sol en un temps raisonnable à partir d'un nombre important de données éparées.



Dans [2], une approche statistique appelée cokrigage assure une telle reconstruction du sous-sol tandis que dans [3], les données connues sont directement incorporées dans la discrétisation numérique.



Enfin, dans [1], un modèle physique est présenté afin d'expliquer les évolutions observées entre deux strates géologiques. Cette dernière modélisation aura particulièrement retenu notre attention.

## 2 Comment reconstituer le sous-sol ?

### 2.1 Présentation du modèle retenu

Comme dans [1], on se place dans le cadre des méthodes *level-set*. Autrement dit, la couche géologique qui correspond à l'instant  $t$  est une surface  $\Gamma_t$  implicitement représentée par les points d'annulation d'une certaine fonction  $\Psi(t, \cdot)$  appelée champ scalaire:

$$\Gamma_t = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \Psi(t, \mathbf{x}) = 0\}.$$

Afin de relier les différentes couches  $\Gamma_t$  entre elles, i. e. les  $\Psi(t, \cdot)$ , on suppose qu'il existe une loi d'évolution notée  $H$  qui dépend de  $t$ , du point  $\mathbf{x}$  considéré, mais aussi de la normale extérieure unitaire à la surface  $\Gamma_t$  définie de la manière suivante:

$$\vec{\mathbf{n}}(t, \mathbf{x}) = \frac{\vec{\nabla}\Psi(t, \mathbf{x})}{\|\vec{\nabla}\Psi(t, \mathbf{x})\|}.$$

L'évolution de la forme des surfaces  $\Gamma_t$  et plus globalement des champs  $\Psi(t, \cdot)$  au cours du temps est alors régie par une équation aux dérivées partielles dite de Hamilton-Jacobi. Elle modélise un phénomène de propagation et s'écrit sous la forme:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t}(t, \mathbf{x}) + H(\mathbf{x}, \vec{\nabla}\Psi(t, \mathbf{x})) = 0.$$

### 2.2 Description de la loi d'évolution

On suppose qu'il y a exactement  $I$  orientations connues à incorporer dans la loi d'évolution  $H$ . Elles sont représentées par des vecteurs unitaires notés  $\vec{\mathbf{a}}_i$  qui sont respectivement localisés dans le domaine aux points  $\mathbf{x}_i$ , pour tout entier  $i$  allant de 1 à  $I$ .

En s'inspirant de l'expression (13) page 152 donnée dans [1], on fait alors l'hypothèse que la loi d'évolution peut se mettre sous la forme qui suit, les  $\lambda_i$  (resp.  $\mu$ ) paramétrant l'adéquation du modèle par rapport aux  $\vec{\mathbf{a}}_i$  (resp. aux données ponctuelles):

$$H = \mu(\mathbf{x}) \left( \lambda_0(\mathbf{x}) \|\vec{\nabla}\Psi(t, \mathbf{x})\| + \sum_{i=1}^I \lambda_i(\mathbf{x}) \vec{\mathbf{a}}_i \cdot \vec{\nabla}\Psi(t, \mathbf{x}) \right).$$

Enfin, on suppose connaître à certains endroits l'emplacement de  $K$  couches géologiques, ordonnées de la plus âgée à la plus récente. Puis, on fait l'hypothèse que dans la strate  $k$ , il y a  $J_k$  points distincts repérés aux coordonnées  $\mathbf{y}_j^k$  pour  $j$  allant de 1 à  $J_k$ .

### 2.3 Expression des paramètres $\mu$ et $\lambda_i$

Quant on cherche l'équation des caractéristiques associée à  $H$  dans le cas où  $\Psi$  est de la forme  $T(\mathbf{x}) - t$ , on obtient avec  $\mu = 1$ :

$$\dot{\mathbf{x}} = \lambda_0 \vec{\mathbf{n}} + \sum_{i=1}^I \lambda_i \vec{\mathbf{a}}_i.$$

Ainsi, dans ce cas là, un point  $\mathbf{x} \in \Gamma_t$  aura tendance à être localement déplacé dans la direction formée par une combinaison linéaire des différents vecteurs  $\vec{\mathbf{a}}_i$  et de la normale  $\vec{\mathbf{n}}$ , dont les coefficients sont justement les  $\lambda_i$  qu'on veut définir.

On fait donc l'hypothèse qu'en dehors d'un disque de centre  $\mathbf{x}_i$ , i.e. le point où  $\vec{\mathbf{a}}_i$  se situe, et de rayon  $r_i$  à calibrer, le vecteur  $\vec{\mathbf{a}}_i$  n'influera pas du tout. Puis, on suppose que les  $I$  disques ne s'intersectent pas entre eux. Pour  $\mathbf{x} \in \Gamma_t$ , on pose alors  $\lambda_0(\mathbf{x}) = 1 - \sum_{i=1}^I \lambda_i(\mathbf{x})$  où:

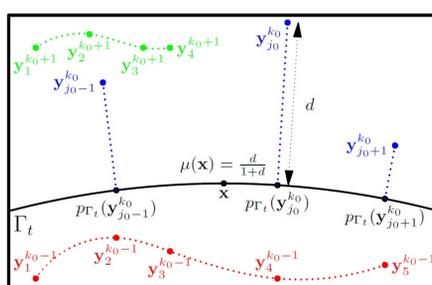
$$\forall i \in \{1, \dots, I\}, \lambda_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|^2}{e^{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|^2 - r_i^2}} & \text{si } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| < r_i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Quant à  $\mu$ , il suffit de regarder l'équation de Hamilton-Jacobi pour voir qu'il agira sur l'ordre de grandeur avec lequel le champ  $\Psi(t, \cdot)$  sera localement modifié par  $H$  au cours du temps, alors que les  $\lambda_i$  influencent la direction par laquelle cette déformation avait lieu.

En effet, plus il devient nul et plus  $\Phi(t, \cdot)$  reste constant au cours du temps et donc plus la surface  $\Gamma_t$  n'évolue pas. Au contraire, celui-ci n'aura aucune influence s'il est proche de un.

C'est donc en jouant spatialement sur cette propriété de  $\mu$  que la surface  $\Gamma_t$  va être contrainte de se rapprocher plus ou moins vite des points  $\mathbf{y}_j^k$  imposés. On pose ainsi (cf. figure ci-dessous):

$$\mu(\mathbf{x}) = \frac{\|p_{\Gamma_t}(\mathbf{y}_{j_0}^{k_0}) - \mathbf{y}_{j_0}^{k_0}\|}{1 + \|p_{\Gamma_t}(\mathbf{y}_{j_0}^{k_0}) - \mathbf{y}_{j_0}^{k_0}\|}.$$



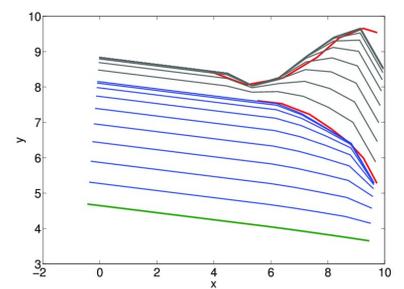
## 3 Les résultats numériques obtenus

Deux approches ont été considérées. La première consiste à discrétiser les points de la surface  $\Gamma_0$  puis de les faire glisser au fur et à mesure dans la direction suggérée par l'équation des caractéristiques. Le logiciel MATLAB a été utilisé pour les calculs.

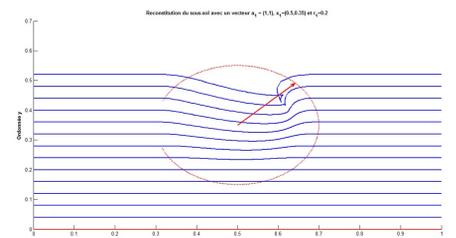
Au contraire, la seconde considère l'ensemble du domaine d'étude discrétisé puis cherche à faire évoluer la valeur du flot  $\Psi$  en chaque point de la grille grâce à l'équation de Hamilton-Jacobi, la surface  $\Gamma_t$  étant déterminée à l'aide d'un algorithme de recherche de contour.

### 3.1 L'approche lagrangienne

Cette méthode est très facile à mettre en œuvre et permet d'obtenir une reconstitution rapidement le sol. On l'a testé sur un cas 2D sans failles. Dans le cas de points imposés, le résultat est satisfaisant.

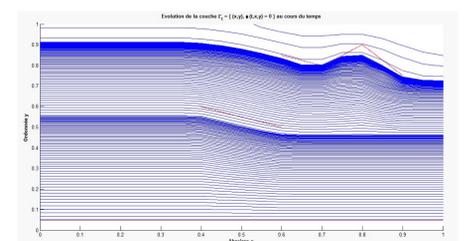


Par contre, l'influence des vecteurs est mal prise en compte par l'algorithme. Ceci provient essentiellement du fait qu'il effectue un glissement de points dont les caractéristiques peuvent se croiser.

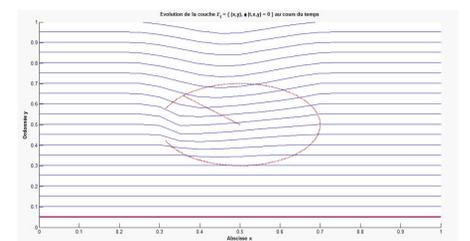


### 3.2 L'approche eulérienne

Si la méthode précédente était difficilement généralisable à l'espace, celle-ci ne dépend pas de la dimension dans laquelle on travaille. C'est d'ailleurs la force des méthodes implicites décrites dans [4].



Comme précédemment, les points imposés sont très bien pris en compte contrairement à l'influence du vecteur. Cependant, cette méthode empêche toute auto-intersection des lignes de niveau.



## References

- [1] Ø. HJELLE AND S. A. PETERSEN, *A Hamilton-Jacobi framework for modeling folds in structural geology*, Mathematical Geosciences, **43** (7), 741-761, October 2011.
- [2] P. CALCAGNO, J.-P. CHILS, G. COURRIOUX AND A. GUILLEN, *Geological modelling from field data and geological knowledge Part I. Modelling method coupling 3D potential-field interpolation and geological rules*, Physics of the Earth and Planetary Interiors, **171** (1-4), 147-157, December 2008.
- [3] G. CAUMON, G. GRAY, C. ANTOINE AND M.-O. TITEUX, *3D Implicit Stratigraphic Model Building From Remote Sensing Data on Tetrahedral Meshes: Theory and Application to a Regional Model of La Popa Basin, NE Mexico*, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, **51** (3), 1613-1621, March 2013.
- [4] S. OSHER AND R. FEDKIW, *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*, Applied Mathematical Sciences, **153**, Springer, 2003.