

Département Ingénierie Mathématique

# Rapport de stage de fin d'étude

GDF SVez

REDÉCOUVRONS L'ÉNERGIE

PÔLE SIMULATION ET OPTIMISATION

Auteur : Dalphin Jérémy

Encadrants de stage - aux Mines : HENROT Antoine

 chez GDF SUEZ : CASTELLAN Natacha JACQUIAU Arthur SINEGRE Laure

## Résumé

En raison de leur profil de consommation particulier, les nouvelles Centrales dite à Cycles Combinés Gaz (CCCG) qui s'implantent actuellement sur le réseau de transport de gaz ont un impact important sur celui-ci qu'il est nécessaire d'étudier.

Ce rapport présente une modélisation dynamique des écoulements gazeux au sein d'une conduite suite au démarrage d'une CCCG. A partir des équations couplées utilisées dans le domaine du gaz, on obtient une équation d'évolution de la pression de type "équation de la chaleur".

L'avantage de posséder une formulation explicite de la pression est ensuite exploité afin d'élaborer des stratégies de gestion du réseau. On obtient notamment des ordres de grandeur sur le temps optimal de démarrage d'un stockage afin de stabiliser la pression.

# Table des matières

Résumé	2
Remerciements	9
Introduction	10

1 L'environnement du stage : un pôle de recherche de l'industrie énergétiq					
	1.1	international de l'énergie et de l'environnement	19		
	1 0	CDE CUEZ - un des numéries én unéticient	10		
	1.2	GDF SUEZ : un des preimers energeticiens au niveau mondial	14		
	1.3	Une composante recherche forte et centralisee	19		
<b>2</b>	Le o	contexte du stage : un besoin croissant de compréhension des phéno-			
	mèn	nes dynamiques	16		
	2.1	Un réseau de transport français de gaz à exploiter	16		
	2.2	La filiale GRTgaz : le gestionnaire du réseau de transport de gaz français soumis			
		à des contraintes d'exploitation	17		
		2.2.1 La mission de GRTgaz : transporter le gaz en toute transparence et équité	17		
		2.2.2 Les contraintes d'exploitation de GRTgaz	18		
		2.2.3 Apparition de contraintes dynamiques	18		
	2.3	Les Centrales à Cycles Combinés Gaz, génératrices de nouvelles contraintes			
		remettant en cause la suffisance du mode de fonctionnement actuel $\ldots$	19		
		2.3.1 Une forte implantation de CCCG dûe à de nombreux avantages	19		
		2.3.2 Un profil de consommation brusque et important	19		
		2.3.3 Un impact fort sur le réseau	20		
	2.4	Vers une prise en compte plus importante des régimes variables	21		
		2.4.1 Solutions envisagées par GRTgaz pour exploiter le réseau	21		
		2.4.2 Solutions que peut proposer MAIA pour aider GRTgaz	21		
3	Le s	sujet du stage : modéliser mathématiquement l'évolution de la pression			
	dan	s une artère suite au démarrage d'une CCCG	<b>22</b>		
	3.1	Enoncé du problème : modéliser dynamiquement une consommation forte et			
		brusque	22		
	3.2	Démarche d'étude	23		

3.2.1	Positionnement du problème	23
3.2.2	Etablissement d'un modèle	23
3.2.3	Validation du modèle	23
3.2.4	Exploitation du modèle	23
3.2.5	Généralisation du modèle	23
Compl	lexité du problème	24
	3.2.1 3.2.2 3.2.3 3.2.4 3.2.5 Compl	3.2.1Positionnement du problème3.2.2Etablissement d'un modèle3.2.3Validation du modèle3.2.4Exploitation du modèle3.2.5Généralisation du modèleComplexité du problème

#### II Etat de l'art

0	-
•,	h
~	• •
_	-

4	$\mathbf{Etu}$	des effectuées sur des réseaux contenant des CCCG	<b>26</b>
	4.1	Exemple du réseau belge surdimensionné	26
	4.2	Evaluation de l'impact d'une CCCG sur l'artère de Seine	26
	4.3	Observations des propriétés dynamiques de la pression	27
<b>5</b>	Mo	délisation à une variable des pertes de charge dans une conduite	<b>28</b>
	5.1	Formule des pertes de charge en régime permanent	28
	5.2	Evolution de la pression moyenne dans une canalisation	29
6	Mo	délisation à deux variables des pertes de charge dans une conduite	30
	6.1	Les équations d'Euler monodimensionnelles	30
	6.2	Equations d'évolution d'un écoulement de gaz en régime variable dans une	
		canalisation industrielle	31
	6.3	Exemple d'une modélisation dynamique de la pression : le vidage d'une cana-	
		lisation par une torche	31

# III Modélisation de l'impact du démarrage d'une CCCG sur les pressions d'une artère 33

7	Hyp	oothèses générales relative à un écoulement au sein d'une conduite $34$	4
	7.1	Unités utilisées dans la modélisation 3	4
	7.2	Système étudié : du gaz naturel	4
	7.3	Dynamique du système : un fluide en mouvement	5
	7.4	Domaine d'étude : une portion de canalisation	6
	7.5	Description de l'écoulement : turbulent et adhérent	6
	7.6	Choix de l'état initial : un régime permanent sans CCCG	6
	7.7	Frontière du système : entrée, sortie, CCCG	7
	7.8	Description d'un milieu continu	$\overline{7}$
0			~
8	Ada	ptation des équations de Navier Stokes au problème 38	8
	8.1	Utilisation de la conservation de la masse	8
		8.1.1 Adaptation du terme de variation de masse	8
		8.1.2 Adaptation du terme de flux de masse	8
		8.1.3 Adaptation du terme source	8
		8.1.4 Formulation locale de la conservation de la masse	9
	8.2	Utilisation de la conservation de la quantité de mouvement	9
		8.2.1 Adaptation du terme de variation de quantité de mouvement	9
		8.2.2 Adaptation du terme de flux de quantité de mouvement	9
			~

		8.2.4	Formulation locale de la conservation de la quantité de mouvement	40
	8.3	Choix	de la formulation du facteur de compressibilité	41
		8.3.1	Utilisation habituelle de tables et de corrélations empiriques	41
		8.3.2	Raisonnement théorique effectué sur l'équation d'état	42
		8.3.3	Comparaison des formulations théorique et empirique	43
	8.4	Obten	tion du système d'équations d'évolution	44
	0.1	841	Hypothèse d'un écoulement monodimensionnel	44
		842	Hypothèse d'un écoulement où l'accélération est négligeable vis-à-vis	
		0.1.2	des forces considérées	44
		843	Hypothèse d'un écoulement isotherme	45
		8.4.4	La pression et le débit normalisé comme variables de travail	45
			r	
9	Une	équat	tion non-linéaire simplifiée en une équation de la chaleur	46
	9.1	Etabli	ssement de l'équation d'évolution de la pression	46
		9.1.1	Hypothèse d'un écoulement unidirectionnel	46
		9.1.2	Découplage du système d'équation	46
	9.2	Obten	tion d'une équation de la chaleur	47
		9.2.1	Linéarisation de la dérivée spatiale autour de l'état initial	47
		9.2.2	Indépendance spatiale du facteur de compressibilité	48
		9.2.3	Choix de la variable de travail	48
		9.2.4	Une équation de la chaleur qui possède une solution explicite	49
	9.3	Résolu	tion de l'équation de l'équation de la chaleur	49
		9.3.1	Calcul du coefficient de diffusivité	50
		9.3.2	Changement de variable afin d'obtenir des conditions de bords de type	
			Neumann nulles	54
		9.3.3	Développement des termes en série de Fourier	54
		9.3.4	Etude de la série de Fourier	55
тт	7 <b>T</b>	7 11 1		20
11	′ <b>V</b>	alida	tion du modèle grâce au logiciel de référence Simone	59
10	Calo	cul des	paramètres de la modélisation	60
	10.1	Donné	es nécessaires au calcul des paramètres	60
	10.2	Précis	ions sur le facteur de compressibilité	61
		10.2.1	La formule de Redlich-Kwong issue des méthodes cubiques	61
		10 2 2	La formule de type AGA issue des méthodes viriel	62
		10.2.3	La formule de Papav issue des états correspondants	63
	10.3	Calcul	précis de la densité normalisé	63
	10.0	Calcul	précis du coefficient de frottement	63
	10.1	10 4 1	Formule de Nikuradze	63
		10.1.1 10.4.2	Formule de Colebrook	64
		10.4.2	La máthada PTM	64
		10.4.0 10.4.4	Calcul effectif du coefficient de frottement	64
		10.4.4		04
11	$\mathbf{Etu}$	de de l	l'état initial	66
	11.1	Résolu	tion des équations de Navier Stokes en régime permanent	66
	11.2	Etat in	nitial sans les termes d'inertie	67
	11.3	Etat in	nitial de la modélisation	67
	11.4	Compa	araison des résultats	68

11.4.1Entre l'état initial et le modèle	69 70
12 Etude du régime dynamique         12.1 Validité du modèle sur le profil temporel         12.2 Description des expériences effectuées pour valider le modèle         12.3 Comparaison des résultats	<b>71</b> 71 72 73
V Exploitation du modèle en vue d'applications pratiques	76
<ul> <li>13 Résumé des étapes importantes de la modélisation</li> <li>13.1 Etablissement d'un système d'équation d'évolution dynamique</li></ul>	<b>77</b> 77 78 78 79 79
<ul> <li>14 Interprétation physique de la solution sous forme d'un modèle simplifié</li> <li>14.1 Pertes de charges initiales propre à l'écoulement</li></ul>	80 81 81 83 83 83 83 83 89 94 94 95 97
<ul> <li>15 Quelques exemples d'utilisation du modèle simplifié pour répondre à des problématiques de gestion du réseau</li> <li>15.1 Un diamètre élevé réduit les pertes de charges</li></ul>	<b>98</b> 98 100 100
<ul> <li>16 Généralisation du modèle à un état initial quelconque et des conditions de bords différentes</li> <li>16.1 Résolution de l'équation de la chaleur dans le cas général</li></ul>	<b>102</b> 102 104 104
VI Annexes	106
17 Existence et unicité d'une solution à l'équation	107

-	
17.1 Une équation de type elliptique-parabolique dégénérée	107
17.2 Hypothèses sur les données	107

	17.3	Existence d'une solution faible	108
		17.3.1 Théorème d'existence	108
		17.3.2 Définition d'une solution faible	108
	17.4	Théorème d'existence d'une solution régulière	108
	17.5	Unicité mise sous forme comparative	109
		17.5.1 Théorème de comparaison	109
		17.5.2 Définition d'une sur-solution	109
		17.5.3 Définition d'une sous-solution	109
	17.6	Application des théorèmes à l'équation d'évolution de la pression	110
	11.0	17.6.1 Vérification des hypothèses de dénart	110
		17.6.2 Existence et unicité d'une solution faible	111
		17.6.2 Existence et uniente d'une solution faible	119
		17.0.5 Regularité de la solution faible obtenue	112
18	Sim	ulation numérique du système d'équations d'évolution	113
	18.1	Rappel du problème	113
	18.2	Discrétisation de l'équation d'évolution	113
	18.3	Calcul de l'état initial	114
	18.7	Evaluation du débit normalisé aux interfaces	116
	18.5	Présentation des régultats	116
	10.0		110
19	Dese	cription succincte du modèle $P/Z$	119
	19.1	Etablissement et résolution de l'équation d'évolution	119
	19.2	Etablissement de l'état initial	120
	19.3	Comparaison entre le modèle classique et le modèle $P/Z$	122
	10.0		
<b>20</b>	Gra	phiques issus des expériences permettant la validation du modèle	125
20	<b>Gra</b> 20.1	phiques issus des expériences permettant la validation du modèle Premier cas	<b>125</b> 125
20	<b>Gra</b> 20.1	phiques issus des expériences permettant la validation du modèlePremier cas20.1.1Données de départ	<b>125</b> 125 125
20	<b>Gra</b> 20.1	phiques issus des expériences permettant la validation du modèlePremier cas20.1.1Données de départ20.1.2Résultats obtenus en temps	<b>125</b> 125 125 126
20	<b>Gra</b> 20.1	phiques issus des expériences permettant la validation du modèlePremier cas20.1.1 Données de départ20.1.2 Résultats obtenus en temps20.1.3 Résultats obtenus en espace	<b>125</b> 125 125 126 127
20	<b>Gra</b> 20.1	phiques issus des expériences permettant la validation du modèlePremier cas	<b>125</b> 125 125 126 127 128
20	<b>Gra</b> 20.1 20.2	phiques issus des expériences permettant la validation du modèle         Premier cas	<b>125</b> 125 125 126 127 128 128
20	<b>Gra</b> 20.1 20.2	phiques issus des expériences permettant la validation du modèle         Premier cas	<b>125</b> 125 125 126 127 128 128 128
20	<b>Gra</b> 20.1 20.2	phiques issus des expériences permettant la validation du modèlePremier cas	<b>125</b> 125 126 127 128 128 128 129 130
20	Gray 20.1 20.2	phiques issus des expériences permettant la validation du modèlePremier cas	<ul> <li>125</li> <li>125</li> <li>126</li> <li>127</li> <li>128</li> <li>129</li> <li>130</li> <li>131</li> </ul>
20	Gray 20.1 20.2 20.3	phiques issus des expériences permettant la validation du modèle         Premier cas	<b>125</b> 125 126 127 128 128 129 130 131 131
20	<b>Gra</b> : 20.1 20.2 20.3	phiques issus des expériences permettant la validation du modèlePremier cas	<b>125</b> 125 126 127 128 128 129 130 131 131
20	Gray 20.1 20.2 20.3	phiques issus des expériences permettant la validation du modèlePremier cas	<b>125</b> 125 126 127 128 128 129 130 131 131 132 133
20	Gray 20.1 20.2 20.3	phiques issus des expériences permettant la validation du modèlePremier cas	<b>125</b> 125 126 127 128 128 129 130 131 131 132 133
20	Gray 20.1 20.2 20.3 20.4	phiques issus des expériences permettant la validation du modèlePremier cas	<b>125</b> 125 126 127 128 128 129 130 131 131 132 133 134
20	Gray 20.1 20.2 20.3 20.4	phiques issus des expériences permettant la validation du modèlePremier cas	<b>125</b> 125 126 127 128 128 129 130 131 131 132 133 134 134
20	Gray 20.1 20.2 20.3 20.4	phiques issus des expériences permettant la validation du modèle         Premier cas	<b>125</b> 125 126 127 128 128 129 130 131 131 132 133 134 134 135
20	Gray 20.1 20.2 20.3 20.4	phiques issus des expériences permettant la validation du modèlePremier cas	<b>125</b> 125 126 127 128 128 129 130 131 131 132 133 134 134 135 136
20	Gray 20.1 20.2 20.3 20.4 20.5	phiques issus des expériences permettant la validation du modèle         Premier cas	<b>125</b> 125 126 127 128 128 129 130 131 131 132 133 134 135 136 137
20	Gray 20.1 20.2 20.3 20.4 20.5	phiques issus des expériences permettant la validation du modèlePremier cas	<b>125</b> 125 126 127 128 128 129 130 131 131 132 133 134 134 135 136 137
20	Gray 20.1 20.2 20.3 20.4 20.5	phiques issus des expériences permettant la validation du modèlePremier cas	<b>125</b> 125 126 127 128 128 129 130 131 131 132 133 134 134 135 136 137 137
20	Gray 20.1 20.2 20.3 20.4 20.5	phiques issus des expériences permettant la validation du modèlePremier cas	<b>125</b> 125 126 127 128 128 129 130 131 131 132 133 134 135 136 137 137 138 139
20	Gray 20.1 20.2 20.3 20.4 20.5 20.6	phiques issus des expériences permettant la validation du modèlePremier cas	$\begin{array}{c} 125 \\ 125 \\ 125 \\ 126 \\ 127 \\ 128 \\ 128 \\ 129 \\ 130 \\ 131 \\ 131 \\ 132 \\ 133 \\ 134 \\ 135 \\ 136 \\ 137 \\ 137 \\ 138 \\ 139 \\ 140 \end{array}$
20	Gray 20.1 20.2 20.3 20.4 20.5 20.6	phiques issus des expériences permettant la validation du modèlePremier cas	$\begin{array}{c} 125 \\ 125 \\ 125 \\ 126 \\ 127 \\ 128 \\ 129 \\ 130 \\ 131 \\ 132 \\ 133 \\ 134 \\ 134 \\ 135 \\ 136 \\ 137 \\ 138 \\ 139 \\ 140 \\ 140 \end{array}$

	20.6.3	Résultats obtenus en espace		 •	•	 •		•				 •			•	 142
20.7	Septièr	ne cas		 •		 •										 143
	20.7.1	Données de départ														 143
	20.7.2	Résultats obtenus en temps														 144
	20.7.3	Résultats obtenus en espace		 •		 •									•	 145
20.8	Huitièr	me cas														 146
	20.8.1	Données de départ		 •		 •										 146
	20.8.2	Résultats obtenus en temps														 147
	20.8.3	Résultats obtenus en espace														 148
20.9	Neuviè	me cas														 149
	20.9.1	Données de départ														 149
	20.9.2	Résultats obtenus en temps		 •		 •									•	 150
	20.9.3	Résultats obtenus en espace	•	 •	•	 •	• •	•	 •	•	•		•	•	•	 151
Conclu	sion															152

# Remerciements

Je tiens à remercier fortement mes maîtres de stage Arthur Jacquiau-Chamski, Laure Sinegre et Natacha Castellan pour l'encadrement, l'intégration au sein de l'équipe, la disponibilité et les conseils qu'ils ont sus me donner tout au long de cette expérience professionnelle enrichissante.

Je remercie également le directeur du CRIGEN<sup>1</sup> M. Florette, le chef du PSO<sup>2</sup> M. Chauvet et le chef du macro-projet MAIA<sup>3</sup> M. Naït ainsi que Mme Flottes qui lui a succédé, pour leur accueil, leur écoute et sans qui ce stage n'aurait pu se réaliser.

Enfin, je tiens à témoigner ma reconnaissance à toute l'équipe du pôle pour leur bonne humeur, leur dynamisme et leur chaleureux accueil.

<sup>1.</sup> Centre de Recherche et Innovation Gaz et Energies Nouvelles.

<sup>2.</sup> Pôle Simulation et Optimisation.

<sup>3.</sup> Management des Actifs et des InfrAstructures.

## Introduction

#### Parcours personnel

Elève-ingénieur à l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Nancy, j'ai décidé de réaliser une année de césure durant la période 2009-2010. Ce choix va me permettre de prendre du recul vis-à-vis de mon projet professionnel, de réfléchir aux orientations à effectuer quant aux futurs métiers que je désirerais exercer, et d'acquérir de l'expérience professionnelle grâce à divers stages dans le domaine de la recherche en mathématiques appliquées.

J'ai suivi la première année de Master en mathématiques à l'université Henri Poincaré de Nancy en parallèle avec l'enseignement du département d'Ingénierie Mathématique des Mines. Ma formation s'est notamment spécialisée autour de deux axes : probabilités et équations aux dérivées partielles. Mais elle s'est également diversifiée dans l'algèbre, l'optimisation et la simulation numérique afin d'obtenir des connaissances approfondies en mathématiques théoriques. Elle a enfin été complétée d'une bonne compréhension physique des phénomènes en vue d'applications pratiques.

En septembre 2009, j'ai par conséquent intégré le Centre de Recherche et Innovation Gaz et Energies Nouvelles de GDF SUEZ, afin d'y réaliser un stage d'une durée de six mois en calcul scientifique<sup>4</sup> dans le Pôle Simulation et Optimisation, dont la tâche consiste à élaborer et développer des outils informatiques d'aide à la décision.

#### Sujet du stage

GDF SUEZ est un groupe mondial intégré, présent sur l'ensemble de la chaîne de l'énergie. En particulier, le réseau de transport de gaz naturel français est géré par une de ses filiales : GTRgaz. Ce dernier doit maîtriser la gestion du réseau malgré de fortes contraintes d'exploitation intégrant de plus en plus des composantes dynamiques.

En effet, de nouvelles centrales, dites à Cycles Combinés Gaz (CCCG), s'implantent actuellement massivement sur le réseau. Elles représentent des brusques et importants prélèvements de gaz. Ce nouveau profil de consommation intrinsèquement dynamique a un impact important sur la pression dans le réseau et introduit de nouvelles contraintes d'exploitation pour GRTgaz.

C'est pourquoi il nécessaire de modéliser l'impact de ces centrales sur le réseau et cela a été l'objectif de mon stage. J'ai été amené à modéliser mathématiquement les écoulements gazeux au sein d'une conduite après démarrage d'une CCCG. Ceci aboutit à l'obtention d'une formulation explicite de l'évolution de la pression. Il s'ensuivit alors un travail de validation

<sup>4.</sup> Le calcul scientifique est une discipline qui regroupe, de manière large, la simulation numérique, la modélisation et l'analyse numérique.

par simulation puis d'exploitation du modèle. Le tableau ci-dessous reprend mensuellement les principales étapes du cheminement de mon stage.

Septembre	Appropriation du sujet et travail bibliographique
Octobre	Simulation et modélisation numérique des phénomènes
Novembre	Abandon du modèle numérique au profit d'un modèle mathématique
Décembre	Validation et exploitation du modèle
Janvier	Amélioration du modèle
Février	Rédaction du rapport et présentation des résultats

#### Plan du rapport

Ce rapport présentera tout d'abord l'environnement qui m'a accueilli : un pôle de recherche au sein du plus important centre du groupe GDF SUEZ. Il délimitera le contexte et les enjeux du stage : un besoin croissant de compréhension des phénomènes dynamiques qui contraignent de plus en plus la gestion du réseau de transport de gaz français. Il énoncera ainsi précisément la problématique du stage puis un état de l'art sera effectué sur le sujet : modéliser l'impact du démarrage des Centrales à Cycles Combinés Gaz sur les pressions d'une artère.

Ensuite, la deuxième partie se divisera en deux étapes importantes. D'une part, sous des hypothèses usuellement faites dans le domaine du gaz, ce rapport établira à partir des équations de Navier Stokes une équation d'évolution non-linéaire de la pression. D'autre part, grâce à des hypothèses de linéarisation, il présentera comment obtenir une équation de diffusion qui possède une solution explicite sous forme de série de Fourier.

Enfin, une validation de ce modèle sera effectuée par simulation numérique des équations d'évolution grâce au logiciel de simulation SIMONE<sup>5</sup>. Ce modèle sera alors exploité pour retrouver les propriétés attendues de la solution, pour mettre en évidence la dépendance des paramètres vis-à-vis de la pression ainsi que pour élaborer des stratégies de gestion du réseau. Un ordre de grandeur sur le temps optimal de démarrage d'un stockage permettant de stabiliser la pression au sein de la canalisation sera notamment calculé. Finalement, il sera expliqué ce qu'il est possible d'obtenir en généralisant la méthode présentée ici afin d'intégrer celle-ci dans des outils d'aide à la décision.

<sup>5.</sup> Pour plus d'informations, voici l'adresse internet du site officiel : http://www.simone.eu/simone-company-about.asp.

## Première partie

Présentation du stage de fin d'étude : où s'est-t-il déroulé ? A partir de quelles attentes s'est-il matérialisé ? En quoi a-t-il consisté ?

# L'environnement du stage : un pôle de recherche de l'industrie énergétique

## 1.1 La fusion entre Gaz de France, un spécialiste français du gaz, et Suez, un expert international de l'énergie et de l'environnement

Le projet de fusion entre les entreprises Gaz de France et Suez a été publiquement annoncé pour la première fois le 25 février 2006<sup>1</sup>. Ce projet s'inscrivait dans un contexte de mondialisation et de libéralisation des marchés de l'énergie.

Il s'agissait de constituer un groupe énergétique français qui puisse rivaliser mondialement avec d'autres comme GazProm. Or, Gaz de France était un grand groupe français présent sur l'ensemble de la chaîne gazière alors que Suez possédait une expérience internationale forte dans le domaine de l'eau et de l'électricité. La fusion permettrait donc d'associer des compétences complémentaires.

Chacun son tour, les syndicats de Gaz de France, l'opposition de gauche, la Commission européenne, les actionnaires de Suez et enfin le Conseil constitutionnel ont longtemps critiqué et retardé l'opération<sup>2</sup>. Finalement, plus de deux ans et demi après l'annonce de leur rapprochement, Suez et Gaz de France ont officialisé leur fusion le 16 juillet 2008<sup>3</sup>. Le groupe français GDF SUEZ devient ainsi le troisième leader mondial de l'énergie<sup>4</sup>.

#### GDF Svez

REDÉCOUVRONS L'ÉNERGIE

FIGURE 1.1 – Le logo GDF SUEZ.

<sup>1.</sup> http://fr.wikipedia.org/wiki/Projet\_de\_fusion\_Gaz\_de\_France\_-\_Suez

 $<sup>2. \</sup> http://www.rfi.fr/actufr/articles/103/article_68638.asp$ 

 $<sup>3. \</sup> http://www.gdfsuez.com/fr/finance/actionnaires/assemblees-generales/assemblee-generale-mixtes-de-fusion-du-16-juillet-2008/assemblees-generales-mixtes-de-fusion-du-16-juillet-2008/assemblees-generales-mixtes-de-fusion-du-16-juillet-2008/assemblees-generales-mixtes-de-fusion-du-16-juillet-2008/assemblees-generales-mixtes-de-fusion-du-16-juillet-2008/assemblees-generales-mixtes-de-fusion-du-16-juillet-2008/assemblees-generales-mixtes-de-fusion-du-16-juillet-2008/assemblees-generales-mixtes-de-fusion-du-16-juillet-2008/assemblees-generales-mixtes-de-fusion-du-16-juillet-2008/assemblees-generales-mixtes-de-fusion-du-16-juillet-2008/assemblees-generales-mixtes-de-fusion-du-16-juillet-2008/assemblees-generales-mixtes-de-fusion-du-16-juillet-2008/assemblees-generales-mixtes-de-fusion-du-16-juillet-2008/assemblees-generales-mixtes-de-fusion-du-16-juillet-2008/assemblees-generales-mixtes-de-fusion-du-16-juillet-2008/assemblees-generales-mixtes-de-fusion-du-16-juillet-2008/assemblees-generales-mixtes-de-fusion-du-16-juillet-2008/assemblees-generales-mixtes-de-fusion-du-16-juillet-2008/assemblees-generales-mixtes-de-fusion-du-16-juillet-2008/assemblees-generales-mixtes-de-fusion-du-16-juillet-2008/assemblees-generales-mixtes-de-fusion-du-16-juillet-2008/assemblees-generales-mixtes-de-fusion-du-16-juillet-2008/assemblees-generales-mixtes-de-fusion-du-16-juillet-2008/assemblees-generales-mixtes-du-16-juillet-2008/assemblees-generales-mixtes-du-16-juillet-2008/assemblees-generales-mixtes-du-16-juillet-2008/assemblees-generales-mixtes-du-16-juillet-2008/assemblees-generales-mixtes-du-16-juillet-2008/assemblees-generales-mixtes-du-16-juillet-2008/assemblees-generales-mixtes-du-16-juillet-2008/assemblees-generales-mixtes-du-16-juillet-2008/assemblees-generales-mixtes-du-16-juillet-2008/assemblees-generales-mixtes-du-16-juillet-2008/assemblees-generales-mixtes-du-16-juillet-2008/assemblees-generales-mixtes-du-16-juillet-2008/assemblees-generales-mixtes-du-16-juillees-generales-mixtes-du-16-juillees-generales-mixtes-du-16-$ 

 $<sup>4. \</sup> http://money.cnn.com/magazines/fortune/global500/2009/industries/165/index.html$ 

## 1.2 GDF SUEZ : un des premiers énergéticiens au niveau mondial

La fusion entre Gaz de France et Suez en juillet 2008 a donné naissance à un nouveau géant énergétique européen baptisé GDF SUEZ. Le groupe est représenté dans les principaux indices internationaux. Il pèse plus de 80 milliards d'euros de chiffre d'affaires et capitalise plus de 65 milliards d'euros. Il devient <sup>5</sup> :

- le premier acheteur de gaz en Europe;
- le leader mondial du Gaz Naturel Liquéfié (GNL);
- le premier opérateur de réseau de transport et de distribution de gaz en Europe;
- le deuxième opérateur de stockage de gaz et de terminaux méthaniers<sup>6</sup> en Europe;
- le leader européen des services multi-énergies.

GDF SUEZ est un groupe intégré, présent sur l'ensemble de la chaîne de l'énergie. Il produit, transporte, distribue et commercialise du gaz, de l'électricité et des services auprès d'un peu moins de 14 millions de consommateurs grâce à environ 200 000 collaborateurs. Les métiers vont de l'achat, la production et la commercialisation de gaz et d'électricité, jusqu'au transport, à la distribution, à la gestion et au développement de grandes infrastructures électriques et gazières, en passant par la conception et la commercialisation de services énergétiques et environnementaux<sup>7</sup>.



FIGURE 1.2 – GDF SUEZ est un groupe intégré sur l'ensemble de la chaîne énergétique.

Le groupe s'est également engagé à répondre aux enjeux du secteur de l'énergie : sécurité de l'approvisionnement, libéralisation des marchés, convergence gaz/électricité et promotion d'énergies propres<sup>8</sup>. Bénéficiant d'une forte position concurrentielle sur le marché du gaz et de l'électricité, il compte également sur un portefeuille d'approvisionnement en énergie diversifié, sur un vaste parc de production flexible et sur une forte composante recherche et développement.

8. http://fr.wikipedia.org/wiki/GDF\_SUEZ

<sup>5.</sup> http://www.gdfsuez.com/fr/actualites/vue-ensemble/vue-ensemble

<sup>6.</sup> Un méthanier est un navire servant à transporter du GNL dans ses citernes.

<sup>7.</sup> http://www.gdfsuez.com/fr/activites/nos-metiers/nos-metiers

#### 1.3 Une composante recherche forte et centralisée

Le succès de GDF SUEZ repose largement sur sa capacité à innover. La recherche est ainsi considérée comme un levier important de croissance économique. Elle est représentée par une entité propre : la Direction de le Recherche et de l'Innovation (DRI). Le groupe y investit plus de 200 millions d'euros chaque année, répartis dans huit centres où travaillent pas moins de 1 200 chercheurs<sup>9</sup>.

La moitié des effectifs est située dans le Centre de Recherche et Innovation Gaz et Energies Nouvelles (CRIGEN) sur le site de Saint Denis en région parisienne. Dirigé par M. Florettte, le CRIGEN centralise donc l'essentiel de l'activité de recherche du groupe. Il est structuré en divers départements, eux-même organisés en différents pôles de compétences. Au sein de cette infrastructure, mon stage s'est déroulé dans le Département Economie et Traitement de l'Information (DETI) au sein du Pôle Simulation et Optimisation (PSO) dirigé par M. Chauvet.

Par ailleurs, les activités du CRIGEN se répartissent en macro-projets qui regroupent différents projets. J'ai donc été intégré à l'équipe du projet Aide à la COnduite des Réseaux (ACOR) dirigé par M. Jacquiau-Chamski, au sein du macro-projet Management des Actifs et des InfrAstructures (MAIA).



FIGURE 1.3 – Mon stage s'est déroulé sur la ligne management (en traits pleins) au sein du PSO et sur la ligne projet (en pointillés) au sein d'ACOR.

<sup>9.</sup> http:://www.gdfsuez.com/fr/activites/recherche-et-innovation/recherche-et-innovation

# Le contexte du stage : un besoin croissant de compréhension des phénomènes dynamiques

#### 2.1 Un réseau de transport français de gaz à exploiter

Le gaz naturel importé arrive sur le territoire français soit par gazoducs depuis Dunkerque, Taisnières, Obergailbac et Oltingue, soit par les méthaniers qui livrent le gaz dans les terminaux de regazéification de Fos sur Mer et de Montoir-de-Bretagne. L'ensemble du réseau de gaz français représente 186 000 kilomètres de canalisations qui desservent et raccordent 9 200 communes. Il possède une structure à trois niveaux hiérarchisés dont les deux premières sont représentés sur la figure 2.1 suivante<sup>1</sup>.

- 1. Le réseau de transport principal possède une structure maillée et le sens de parcours du gaz y est variable. Il est constitué de grosses artères d'un mètre de diamètre environ qui transportent du gaz sous haute pression (40–80 bars).
- 2. Le réseau de transport régional est alimenté par le principal. Sa structure en général arborescente impose cette fois un sens de parcours fixe et connu du gaz qui s'y trouve à plus faible pression (12–45 bars).
- 3. Le réseau de distribution est alimenté par le régional et relie ce dernier directement aux clients sous de faible pression (21 mbars–16 bars).

 $<sup>1. \</sup> http \ ://www.cre.fr/var/cre/storage/images/media/images/france_gaz_1/157002-1-fre-FR/france_gaz_1.jpg$ 



FIGURE 2.1 – Le réseau de transport de gaz naturel en France.

## 2.2 La filiale GRTgaz : le gestionnaire du réseau de transport de gaz français soumis à des contraintes d'exploitation

#### 2.2.1 La mission de GRTgaz : transporter le gaz en toute transparence et équité

Née d'une volonté de transparence et d'un souci d'équité d'accès au réseau dans un contexte de libéralisation des marchés, la société anonyme GRTgaz, filiale de GDF SUEZ, a été créée le 1er janvier 2005. En effet, La France a dû se conformer aux directives européennes du marché de l'électricité et du gaz qui prévoit la séparation juridique des activités de transport<sup>2</sup>.

 $<sup>2. \</sup> http://fr.wikipedia.org/wiki/GRTgaz$ 

GRTgaz est le gestionnaire du réseau de transport de gaz naturel en France. Ainsi, il est en charge de son exploitation, de son entretien et de son développement. En échange, il vend des capacités de transport<sup>3</sup> à tout expéditeur présent sur le marché français. Il a donc une double mission :

- acheminer le gaz dans des conditions de coûts et de sécurité optimales ;
- offrir un accès au réseau de transport à tout expéditeur agréé en toute transparence, sans discrimination et avec confidentialité.

#### 2.2.2 Les contraintes d'exploitation de GRTgaz

L'exploitation du réseau est soumise à diverses contraintes que GRTgaz ne maîtrise pas mais qu'il doit prendre en compte pour gérer le réseau, ce qui rend son travail difficile.

- 1. Les pertes de charges<sup>4</sup> et les consommations<sup>5</sup> du gaz en conduite provoquent une chute de la pression dans les canalisations. Ceci entre en contradiction avec le fait qu'il doit y avoir à la fois suffisamment de gaz en conduite et une pression suffisante pour l'acheminement du gaz.
- 2. Les débits aux points d'entrée et de sortie ainsi qu'une partie des stockages ne sont pas connus à l'avance par GRTgaz. En effet, les expéditeurs lui ayant acheté des capacités à un certain endroit, ils peuvent alors d'y faire circuler une quantité moindre que celle pour laquelle ils ont payé. GRTgaz étant prévenu 2 ou 3 h à l'avance, il leur est difficile d'anticiper l'exploitation du réseau.
- 3. Face à ces contraintes, GRTgaz dispose de certains outils d'exploitation comme les stockages de gaz, les vannes de régulation et les stations de compression. Cependant, leur installation, leur maintenance et leur fonctionnement représentent un coût que la société cherche à minimiser.

C'est pourquoi GRTgaz demande à l'équipe MAIA de concevoir des outils informatiques d'aide à la décision pour l'exploitation du réseau. Par exemple, après deux ans d'étude, le PSO a mis au point un logiciel en voie d'industrialisation, MinOPEX, qui propose des solutions permettant de gérer le sens des flux et le démarrage des compresseurs au sein du réseau de manière optimale.

#### 2.2.3 Apparition de contraintes dynamiques

Pour les problématiques envisagées jusqu'à présent, une gestion du réseau en régime permanent, c'est-à-dire indépendamment du temps, suffisait. Les industriels et particuliers étaient constamment connectés au réseau, prélevant selon des débits massiques journaliers progressifs, prévisibles et s'écartant peu d'une moyenne stable. Les apports en gaz étaient donc répartis sur 24 heures. Cette habitude d'exploitation est actuellement remise en cause par l'implantation de nouveaux ouvrages sur le réseau.

<sup>3.</sup> Il vend le droit de faire passer du gaz.

<sup>4.</sup> Ce terme désigne les pertes de pression dues à l'écoulement du gaz en conduite.

<sup>5.</sup> Elles dépendent de nombreux paramètres (climat, position géographique, saison, ...).

## 2.3 Les Centrales à Cycles Combinés Gaz, génératrices de nouvelles contraintes remettant en cause la suffisance du mode de fonctionnement actuel

#### 2.3.1 Une forte implantation de CCCG dûe à de nombreux avantages

On observe ces dernières années une implantation massive de nouvelles Centrales à Cycles Combinés Gaz (CCCG) sur le réseau de gaz français. Ces constructions s'expliquent par leurs avantages par rapport aux autres centrales.

- 1. Dans un contexte de préocuppations écologiques croissantes, les CCCG polluent moins puisqu'elles utilisent le gaz naturel comme combustible<sup>6</sup>.
- 2. Elles possèdent un très bon rendement électrique<sup>7</sup> (50-55 %) dû à l'utilisation de deux sources de chaleur : la combustion du gaz et le réchauffement d'un circuit hydraulique.



FIGURE 2.2 – Fonctionnement d'un cycle combiné.

3. Elles permettent de relier le marché du gaz et de l'électricité, en rendant le réseau électrique plus adaptatif aux changements brusques comme les pics de consommation.

#### 2.3.2 Un profil de consommation brusque et important

Une CCCG possède un fonctionnement intrinsèquement dynamique. Elle représente une consommation forte et importante sur 8 heures. En effet, une CCCG reporte l'instabilité du réseau électrique sur celui du gaz. Deux cas peuvent se produire :

- si un besoin soudain en électricité de fait sentir, la CCCG se met en marche quasiinstantanément, prélevant une quantité très importante de gaz en conduite, ce qui fait chuter la pression jusqu'à rendre impossible l'acheminement effectif du gaz;
- de même, si on constate un surplus d'électricité produite, la CCCG s'arrête brutalement, aboutissant à une hausse de la pression, ce qui pose des problème de sécurité.

 $<sup>6. \</sup> http://www.unctad.org/infocomm/francais/gaz/descript.htm$ 

<sup>7.</sup>  $http://en.wikipedia.org/wiki/Combined_cycle$ 



FIGURE 2.3 – Profil de consommation d'une CCCG fortement dynamique.

Actuellement, les études d'appui sont effectuées en régime permanent et le régime variable est perçu comme la "respiration" du réseau, géré par l'expérience sur le terrain des pilotes du réseau. Le profil intrinsèquement dynamique des CCCG ne peut être inclus dans une respiration normale du réseau et remet donc en cause la suffisance du mode de fonctionnement actuel.

#### 2.3.3 Un impact fort sur le réseau

L'implantation massive des CCCG couplée à un profil de consommation brutal et important va impacter fortement le réseau. En effet, de nombreuses CCCG se mettent en marche en même temps, provoquant des pics et des creux de consommation partout sur le réseau.

De plus, le gaz est livré progressivement sur 24 heures alors qu'il est consommé sur 8 heures. GRTgaz doit alors se débrouiller pour gérer le réseau en utilisant plus systématiquement les stockages et le stock de gaz en conduite. La société a donc besoin de connaître rapidement l'impact des nouvelles centrales sur le réseau.



FIGURE 2.4 – Les apports du réseau répartis et usuellement consommés sur 24 heures face à la consommation d'une CCCG sur 8 heures.

## 2.4 Vers une prise en compte plus importante des régimes variables

#### 2.4.1 Solutions envisagées par GRTgaz pour exploiter le réseau

Plusieurs solutions sont envisageables pour exploiter un réseau avec CCCG.

- 1. On peut envisager d'imposer des délais plus longs que 15 minutes pour prévenir du démarrage d'une CCCG.
- 2. On peut décider de piloter le réseau en temps réel grâce à des vannes de régulation, des capteurs de pression et des stockages de gaz.
- 3. On peut surdimensionner le réseau afin d'augmenter la quantité de gaz disponible en conduite. Ceci est une réponse à long terme qu'envisage GRTgaz.

#### 2.4.2 Solutions que peut proposer MAIA pour aider GRTgaz

Face à un besoin croissant de compréhension des phénomènes dynamiques sous-jacents, MAIA peut proposer plusieurs études afin d'aider GRTgaz à exploiter le réseau.

- 1. On peut faire des études de cas (artère de Seine, artère de Beauce<sup>8</sup>). La simulation intensive permet d'établir des abaques exploitables. Cependant, la simulation s'effectue au cas par cas et ne permet pas de comprendre les phénomènes.
- 2. On peut tenter de modéliser mathématiquement les phénomènes dynamiques sousjacents. Cela a été l'objectif de mon stage.

<sup>8.</sup> cf. état de l'art.

# Le sujet du stage : modéliser mathématiquement l'évolution de la pression dans une artère suite au démarrage d'une CCCG

# 3.1 Enoncé du problème : modéliser dynamiquement une consommation forte et brusque

On considère une portion de canalisation du réseau de transport principal dans laquelle s'écoule du gaz naturel et sur laquelle se situe une CCCG. Il s'agit au cours de ce stage de modéliser l'évolution de la pression dans la conduite suite au démarrage de la centrale.

Quand la CCCG est à l'arrêt, le débit entrant est directement consommé à la sortie. Il s'établit alors un régime d'équilibre : du stock en conduite s'est formé grâce à la compressibilité du gaz.

Lorsque la CCCG démarre, elle va commencer à consommer ce stock de gaz. La pression va alors chuter et on cherche à savoir comment afin d'anticiper à terme des actions pour réhausser cette pression.



FIGURE 3.1 – On considère une CCCG située au milieu d'une canalisation.

### 3.2 Démarche d'étude

#### 3.2.1 Positionnement du problème

Il s'agit de poser un problème mathématique qui possède une unique solution dépendant continûment de l'état initial :

Délimitation des hypothèses générales;

Définition des paramètres utiles;

Etablissement des équations d'évolution;

Choix d'un état initial et de conditions de bords.

#### 3.2.2 Etablissement d'un modèle

Découplage des équations d'évolution Obtention d'une équation d'évolution de la pression. Simplifition du problème Elaboration d'un modèle qui puisse se résoudre explicitement. Interprétation de la formule obtenue.

#### 3.2.3 Validation du modèle

Création d'un programme qui simule numériquement le modèle. Validation du modèle en comparant à la simulation Discussion de la pertinence des hypothèses faites.

#### 3.2.4 Exploitation du modèle

Etude des propriétés de la solution

Etude de la dépendance des paramètres sur la perte ou le gain de pression.

Détermination de la date à laquelle la pression viole les contraintes.

Calcul du temps optimal de démarrage d'un stockage afin de stabiliser la pression.

#### 3.2.5 Généralisation du modèle

Etude avec un état initial et des conditions de bords quelconques.

Développement d'une méthode de résolution permettant d'intégrer le modèle dans des outils d'aide à la décision.

Bilan de ce que le modèle permet de faire et des choses utiles qu'il ne permet pas de réaliser.

### 3.3 Complexité du problème

Tout d'abord, assez peu de problèmes dynamiques de ce type ont été étudié dans le domaine du gaz jusqu'à présent. En effet, cette problématique récente entraîne un manque d'expérience sur le sujet. Les phénomènes sont complexes du fait que les équations d'évolution obtenues sont couplées rendant impossible l'obtention d'une formulation explicite.

Le problème se situe de plus à la frontière de nombreux domaines :

- mathématique (équation aux dérivées partielles linéaires et non-linéaire) qui traite de l'existence et de l'unicité d'une solution ;
- physique (mécanique des fluides et thermodynamique des gaz) qui calcule des ordres de grandeur sur la solution ;
- numérique (simulation des équations de Navier Stokes) qui exprime le plus finement possible la solution dans des temps raisonnables.

Or, une modélisation des phénomènes dans le cadre d'une démarche industrielle se situe à la frontière de ces domaines. Cela nécessite de passer sans cesse du raisonnement théorique qui utilise des outils complexes à des considérations pratiques aboutissant à des hypothèses simplificatrices cohérentes, tout en ayant en tête la possibilité de simuler ce qu'on est en train de construire.

Enfin, le modèle obtenu doit répondre à des critères industriels. Sa formulation doit être compréhensible rapidement par tous et suffisamment explicite pour être exploitable.

Deuxième partie Etat de l'art

# Etudes effectuées sur des réseaux contenant des CCCG

On va ici faire le bilan des études effectuées jusqu'à présent sur les CCCG au sein de GDF SUEZ.

#### 4.1 Exemple du réseau belge surdimensionné

La Belgique possède un réseau surdimensionné sur une petite superficie. Elle ne se préoccupe donc pas du phénomène des CCCG, disposant de suffisamment de gaz en conduite pour assurer le transport. Il n'existe par conséquent pas d'outils particuliers ni d'études spécifiques sur le sujet. Les délais de préavis vont d'une quinzaine de minutes à l'heure [7].

Au contraire, la France se situe à un carrefour européen et doit assurer le transport du gaz sur de longues distances. Il existe une personne qui gère actuellement l'impact en temps réel des CCCG sur le réseau : le répartiteur.

De nombreuses CCCG sont en construction dans le monde entier<sup>1</sup>. DK6 (800 MW) fonctionne comme un gros industriel alors que Cycofos (500 MW) est officiellement encore en test.

# 4.2 Evaluation de l'impact d'une CCCG sur l'artère de Seine

Grâce au logiciel SIMONE, la simulation a permis d'étudier l'impact du démarrage et de l'arrêt d'une CCCG qui serait alimentée via l'artère de Seine. Les résultats sont présentés dans [17].

Des échiquiers de niveaux de difficultés y sont présentés permettant de savoir si la situation semble facile, assez contrainte ou très difficile à gérer. Des abaques d'heures au plus tôt et au plus tard d'apport et d'arrêt de la flexibilité viennent compléter ces informations. Ce rapport met en évidence la variété des situations possibles et incite à une modélisation théorique des phénomènes.

<sup>1.</sup> http://fr.wikipedia.org/wiki/Cycle\_combiné

## 4.3 Observations des propriétés dynamiques de la pression

A partir des études effectuées sur l'artère de Seine et de Beauce, plusieurs propriétés de la pression ont été mis en évidence et synthétisées dans [16]. Une modélisation adéquate des phénomènes devra donc refléter ces propriétés.

- Les pertes et les gains de pression sont additifs.
- Après un régime transitoire, la perte de pression horaire est constante.
- Pour des débits de CCCG plus important, la perte de pression est considérée comme une fonction affine de la pression initiale.
- La perte de pression n'est pas proportionnelle au débit de la CCCG.

# Modélisation à une variable des pertes de charge dans une conduite

On va expliciter les formules permettant de modéliser les pertes de charges en régime permanent et les pertes de charges moyennes temporelles.

### 5.1 Formule des pertes de charge en régime permanent

Une formule de perte de charge est couramment utilisée dans l'industrie gazière : celle de Colebrook [3] . Pour des gaz réels, cette loi non-linéaire ne peut être utilisée que sous les hypothèses d'écoulement permanent, isotherme, horizontal et à haute pression.



FIGURE 5.1 – Une portion de canalisation cylindrique horizontale.

La formule de pertes de charges s'écrit :

$$P_1^2 - P_2^2 = C_{ste} \frac{LQ_N^2}{D^5}.$$

Notation	Description	Unité
$P_1$	Pression en amont	Bar absolu [bara] <sup>1</sup>
$P_2$	Pression en aval	Bar absolu [bara]
L	Longueur de la conduite	Kilomètre [km]
$Q_N$	Débit normalisé $^2$	Mètre cube normalisé par heure $[Nm^3.h^{-1}]$
D	Diamètre intérieur	Mètre [m]
$C_{ste}$	Constante du gaz	Mètre carré par seconde carrée $[m^2.s^{-2}]$

## 5.2 Evolution de la pression moyenne dans une canalisation

Des estimations sur l'évolution de la pression moyenne dans la canalisation suite à une variation de volume de gaz dans la canalisation ont été obtenues dans [8]. On met alors en évidence l'influence du facteur de compressibilité moyen que la modélisation devra établir. En utilisant l'équation des gaz réels PV = ZnRT, on obtient l'ordre de grandeur suivant avec une erreur allant de 2% à 9% :

$$[P_m(t_2) - P_m(t_1)]_{grandeur} \approx C_{te} \frac{\left(V_N(t_2) - V_N(t_1)\right)}{V_{canalisation}} Z_m^2(t_1).$$

Notation	Description	Unité
$P_m(t)$	Pression moyenne au temps $t$	Bar absolu [bara]
$V_N(t)$	Volume normalisé de gaz au temps $t$	Mètre cube normalisé [Nm <sup>3</sup> ]
Vcanalisation	Volume en eau de la conduite	Mètre cube [m <sup>3</sup> ]
$Z_m(t)$	Facteur de compressibilité moyen au temps $t$	Sans unité
$C_{te}$	Constante du gaz	Bar absolu [bara]

<sup>1.</sup> On parle de bars absolus et on note bara par distinction avec les bars relatifs qui expriment un certain nombre de fois la pression atmosphérique 1 barr  $= P_a = 1.01325$  bara.

<sup>2.</sup> On parle d'une quantité normalisée (débit, densité, masse volumique) quand elle est prise dans les conditions normales de référence, c'est-à-dire à la pression atmosphérique  $P_a = 1.01325$  bara et à la température  $T_0 = 0$  °C.

# Modélisation à deux variables des pertes de charge dans une conduite

Pour modéliser de manière spatio-temporelle un écoulement, on dispose des équations de Navier Stokes. Des hypothèses simplificatrices permettent alors parfois d'obtenir des équations d'évolution plus simples et qui possèdent parfois des solutions explicites.

#### 6.1 Les équations d'Euler monodimensionnelles

Ce sont les équations locales de Navier Stokes dans le cas d'un gaz compressible. Elles sont issues des lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie auxquelles s'ajoute une équation d'état du gaz souvent considéré comme parfait.

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho u \right) = 0\\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0\\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho e \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\rho e + p) u \right] = 0\\ p = (\gamma - 1) \rho e \end{cases}$$

Notation	Description	Unité
ρ	Masse volumique	Kilogramme par mètre cube [kg.m <sup>-3</sup> ]
u	Vitesse algébrique	Mètre par seconde $[m.s^{-1}]$
<i>p</i>	Pression	Bar absolu [bara]
e	Energie massique	Joule par kilogramme [J.kg <sup>-1</sup> ]
$\gamma$	Coefficient de Laplace	Sans unité

Ces systèmes hyperboliques sont devenus incontournables à l'étude des équations aux dérivées partielles non-linéaires. Leur étude mathématique difficile fait apparaître la notion de chocs et d'entropie [9] [5]. Leur simulation numérique utilise le problème de Riemann pour calculer la valeur du flux à l'interface [12] [11]. Cependant, pour des écoulements de gaz en régime variable dans des conduites industrielles, les hautes pressions et les débits massiques importants incitent à modifier la forme de ces équations.

## 6.2 Equations d'évolution d'un écoulement de gaz en régime variable dans une canalisation industrielle

Ces équations sont modélisées dans [1] à partir d'un écoulement monodimensionnel isotherme, horizontal, à haute pression (40 - 80 bara) et débit normalisé important ( $50\ 000 - 1\ 000\ 000\ \text{Nm}^3.\text{h}^{-1}$ ), pour lequel les termes d'inertie sont négligés. La validité de ces hypothèses est discutée dans [18].

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} = -\beta \frac{\partial Q_N}{\partial x} \\ \frac{\partial (P^2)}{\partial x} = -\alpha Q_N^2 \end{cases}$$

Notation	Description	Unité
P	Pression	[bara]
$Q_N$	Débit normalisé	$\left[\mathrm{Nm}^{3}.\mathrm{h}^{-1}\right]$
α	Constante spatiale	$[kg^2.m^{-3}.Nm^{-6}.s^{-2}]$
β	Constante temporelle	$\left[\mathrm{kg.Nm^{-3}s^{-2}}\right]$

Au cours de la première partie de la modélisation, ces équations seront établies de manière similaire et adaptées à la problématique des CCCG. En particulier, les discussions de [18] sur la validité des hypothèses seront très utilisées.

## 6.3 Exemple d'une modélisation dynamique de la pression : le vidage d'une canalisation par une torche

Une formulation mathématique pour l'étude du régime exponentiel suivant le régime transitoire du vidage d'un tronçon de canalisation par une torche est réalisée dans [13].

$$P(x,t) = P_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \sqrt{1 + C_e \left(1 - \left(1 - \frac{x}{L}\right)^3\right)}$$

Notation	Description	Unité
P(x,t)	Pression en $x$ au temps $t$	Bar absolu [bara]
$P_0$	Pression initiale	Bar absolu [bara]
L	Longueur de la conduite	Kilomètre [km]
au	Constante de temps	Seconde [s]
$C_e$	Constante de la torche	Sans unité

Malheureusement, cette modélisation ne pourra être utilisée dans le cadre de notre étude. En effet, elle exploite un résultat spécifique à la vidange d'une canalisation par une torche qui ne sera pas vérifié dans le contexte des CCCG : le débit normalisé au point de vidage est proportionnel à la pression.

# Troisième partie

# Modélisation de l'impact du démarrage d'une CCCG sur les pressions d'une artère

# Hypothèses générales relative à un écoulement au sein d'une conduite

#### 7.1 Unités utilisées dans la modélisation

Dans l'industrie gazière, on parle de bars absolus et on note bara par distinction avec les bars relatifs qui sont calculées par rapport à la pression atmosphérique  $P_a$ . On a donc :

1 bara =  $P_a + 1$  barr = 1.01325 bar + 1 barr.

De plus, les propriétés du gaz s'expriment souvent dans les conditions normales, c'est-à-dire à la pression atmosphérique  $P_a = 1.01325$  bara et à la température de référence  $T_0 = 0$  °C. On parle alors de quantités normalisées. En particulier, un débit normalisé est proportionnel à un débit massique. Si on considère l'équation des gaz parfaits PV = nRT, on obtient :

$$1 \quad \mathrm{Nm}^3 = \frac{T_0}{T} \frac{P}{P_a} \quad \mathrm{m}^3.$$

Dans toute la suite du rapport, les égalités seront établies avec des grandeurs exprimées dans les unités du système international. Cependant, les ordres de grandeur et les résultats seront donnés dans les unités usuelles de l'industrie gazière.

### 7.2 Système étudié : du gaz naturel

On va étudier du gaz naturel considéré pour le moment comme un gaz parfait. Celui-ci est supposé homogène, principalement constitué de méthane. Le tableau ci-dessous donnent des ordres de grandeur sur les caractéristiques du gaz.

Grandeur	Notation	Ordre de grandeur
Masse molaire	M	$17 \text{ g.mol}^{-1}$
Pouvoir calorifique supérieur normalisé	$PCS_N$	$11.4 \text{ kWh.Nm}^{-3}$
Température	Т	12 °C

En utilisant l'équation des gaz parfaits<sup>1</sup>, on peut alors calculer d'autres ordres de grandeur qui sont présentés dans le tableau ci-dessous.

Grandeur	Notation	Ordre de grandeur	Valeur
Masse volumique normalisée	$ ho_N$	$\frac{MP_a}{RT_0}$	$0.76 \text{ kg.Nm}^{-3}$
Densité normalisée	$d_N$	$\frac{M}{M_{air}}$	0.6

## 7.3 Dynamique du système : un fluide en mouvement

On suppose que le gaz considéré est en mouvement. Il ne se produit aucune réaction chimique ou nucléaire dans l'écoulement. Il est donc caractérisé par des variables dont les ordres de grandeurs sont récapitulés dans le tableau ci-dessous.

Grandeur	Notation	Intervalle de variation	Ordre de grandeur
Pression	Р	40 - 80 bara	60 bara
Débit normalisé	$Q_N$	$50\ 000 - 1\ 500\ 000\ \mathrm{Nm}^3.\mathrm{h}^{-1}$	$450\ 000\ \mathrm{Nm^3.h^{-1}}$
Masse volumique	$\rho \sim \frac{MP}{RT}$	$30 - 60 \text{ kg.m}^{-3}$	43 kg.m <sup>-3</sup>
Vitesse	$U \sim \frac{\rho_N Q_N RT}{SM}$	$0 - 12 \text{ m.s}^{-1}$	$3  \mathrm{m.s^{-1}}$

<sup>1.</sup> On rappelle la valeur de la constante des gaz parfaits R = 8,31 J.mol<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup> et de la masse molaire de l'air  $M_{air} = 29$  g.mol<sup>-1</sup>.

#### 7.4 Domaine d'étude : une portion de canalisation

On considère l'intérieur d'une portion d'artère immobile, horizontale et cylindrique de section constante  $S = \frac{\pi D^2}{4} \sim 0.8 \text{ m}^2$ . Le tableau ci-dessous fournit des ordres de grandeur sur les principales caractéristiques de la canalisation.

Grandeur	Notation	Ordre de grandeur
Diamètre intérieur	D	1 m
Longueur	L	100 km
Rugosité apparente	Ke	$10 \ \mu m$

#### 7.5 Description de l'écoulement : turbulent et adhérent

L'écoulement gazeux considéré possède un nombre de Reynolds élevé. C'est donc un écoulement turbulent et adhérent. Les forces de frottement fluide ne sont pas négligeables et devront être pris en compte dans le bilan des forces. Elles vont entraîner des pertes de charges caractérisées par le coefficient de frottement. Les ordres de grandeurs des caractéristiques de l'écoulement sont résumés dans le tableau ci-dessous<sup>2</sup>.

Grandeur	Notation	Ordre de grandeur	Valeur
Viscosité dynamique	ν	9.91 $10^{-7} \frac{T\sqrt{T}}{164+T}$	$10^{-5}$ Pa.s
Nombre de Reynolds	Re	$\frac{\rho UD}{\nu}$	$1.2 \ 10^7$
Coefficient de frottement	λ	$\frac{1}{4} \left[ \log_{10} \left( 3.71 \frac{D}{Ke} \right) \right]^{-2}$	0.009

## 7.6 Choix de l'état initial : un régime permanent sans CCCG

On suppose que l'état initial est établi en régime permanent avec une CCCG qui ne fonctionne pas. La conservation de la masse implique alors que le débit normalisé est constant dans toute la canalisation que l'on notera  $Q_{Ne}$ .

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho U \right) = 0 \Longrightarrow 0 + \frac{\rho_N}{S} \frac{\partial Q_N}{\partial x} = 0$$

<sup>2.</sup> La formule de la viscosité dynamique et du coefficient de frottement qu'il contient provient de [1].
## 7.7 Frontière du système : entrée, sortie, CCCG

Les parois internes de la canalisation sont adhérentes, calorifugées, indéformables et imperméables sauf à l'entrée, à la sortie et sous la CCCG. On suppose qu'après l'instant initial, la CCCG se met en marche laissant apparaître un débit normalisé  $Q_{Ncccg}$  à l'endroit de la CCCG. Les débits d'entrée et de sortie restent égaux à  $Q_{Ne}$ . Ainsi, sous ses conditions de bords, la CCCG pompe la gaz en conduite ce qui fait chuter la pression. On s'intéresse à l'évolution de cette pression.



FIGURE 7.1 – Une conduite dont le stock en conduite est vidé par le démarrage d'une CCCG.

## 7.8 Description d'un milieu continu

On se place dans le cadre de la physique classique (aucun effet quantique ou relativiste). Ceci est justifié par le fait que  $^3$ :

$$\begin{cases} U << c \iff 3 \text{ m.s}^{-1} << 300 \ 000 \text{ m.s}^{-1} \\ h << \rho_N Q_N S \iff 6.63 \ 10^{-34} \text{ J.s} << 135 \text{ J.s} \end{cases}$$

Dans l'espace usuel, l'observateur se situe dans le référentiel terrestre galiléen. Le temps y est perçu de la même manière par tous les observateurs.

On considère que le milieu est continu lorsque la dimension caractéristique de l'écoulement  $L_c$  est grande devant le libre parcours moyen l d'une molécule de gaz [15]. Cette hypothèse est vérifiée dans le situation présente<sup>4</sup> :

$$l << L_c \iff \frac{k_B T}{\sqrt{2} P \pi \sigma^2} << D \iff 1 \text{ nm } << 1 \text{ m}$$

Dans ces conditions, les fonctions introduites pour caractériser la matière sont continues. Les phénomènes étudiés, même s'ils sont brutaux, sont amortis grâce à la compressibilité du gaz dans des durées et des distances très petites devant celles que l'on observe.

<sup>3.</sup> La constante c désigne la vitesse de la lumière et h la constante de Planck.

<sup>4.</sup>  $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$  kg.m<sup>2</sup> désigne la constante de Boltzmann et  $\sigma \sim 0.375$  nm, la section efficace de diffusion d'une molécule de gaz (air) [14].

## Chapitre 8

# Adaptation des équations de Navier Stokes au problème

On va ici ré-établir les équations de Navier Stokes en les adaptant à notre problématique. Des hypothèses usuelles dans l'industrie du gaz seront alors utilisées pour obtenir un système d'équations simplifié.

## 8.1 Utilisation de la conservation de la masse

On considère un volume fixe  $\Sigma$  fermé de surface  $\partial \Sigma$ . Dans le cadre de notre modélisation, la variation de masse  $\mathcal{V}_{\Sigma}$  au sein de  $\Sigma$  est engendrée par le flux de masse  $\mathcal{F}_{\partial\Sigma}$  à travers  $\partial\Sigma$  et par un terme source  $\mathcal{S}_{cccg}$  dû à la CCCG.

$$\mathcal{V}_{\Sigma} = \mathcal{F}_{\partial \Sigma} + \mathcal{S}_{cccg}$$

#### 8.1.1 Adaptation du terme de variation de masse

Comme le volume  $\Sigma$  est supposé fixe et que  $\rho$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  en temps, on a :

$$\mathcal{V}_{\Sigma} = \frac{d}{dt} \left( \int_{\Sigma} dm \right) = \frac{d}{dt} \left( \int_{\Sigma} \rho dV \right) = \int_{\Sigma} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

## 8.1.2 Adaptation du terme de flux de masse

Le flux de masse  $\overrightarrow{j_m}$  à travers une surface élémentaire dS correspond à la masse orientée des molécules qui ont traversé dS pendant une durée élémentaire dt. Il vient donc en appliquant la formule de Green-Ostrogradski :

$$\mathcal{F}_{\partial\Sigma} = -\int_{\partial\Sigma} \overrightarrow{j_m} \cdot \overrightarrow{dS} = -\int_{\partial\Sigma} \left(\rho \overrightarrow{u}\right) \cdot \left(dS \overrightarrow{n_{dS}}\right) = -\int_{\Sigma} \overrightarrow{\nabla} \cdot \left(\rho \overrightarrow{u}\right) dV$$

### 8.1.3 Adaptation du terme source

On caractérise la perte de masse à la CCCG par son débit normalisé  $Q_{Ncccg}$  et on la représente de manière ponctuelle par une distribution de dirac en un point  $M_{cccg}$ . On a :

$$\mathcal{S}_{cccg} = \begin{cases} -\frac{\rho_N Q_{Ncccg}}{S} & \text{si} \quad M_{cccg} \in \Sigma \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = -\int_{\Sigma} \frac{\rho_N Q_{Ncccg}}{S} \delta_{cccg}(M) dV$$

#### 8.1.4 Formulation locale de la conservation de la masse

En remplaçant chacun des termes dans la première égalité, on obtient :

$$\int_{\Sigma} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla} . \left( \rho \overrightarrow{u} \right) + \frac{\rho_N Q_{Ncccg}}{S} \delta_{cccg} \right] dV = 0$$

Cette formulation globale étant valable quelquesoit le volume  $\Sigma$ , il en résulte que :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla} \cdot (\rho \overrightarrow{u}) + \frac{\rho_N Q_{Ncccg}}{S} \delta_{cccg} = 0$$

## 8.2 Utilisation de la conservation de la quantité de mouvement

Soit  $\Sigma$  un volume fixe de surface  $\partial \Sigma$ . La variation de quantité de mouvement  $\overrightarrow{\mathcal{V}_{\Sigma}}$  au sein de  $\Sigma$  est engendrée par le flux de quantité de mouvement  $\overrightarrow{\mathcal{F}_{\partial\Sigma}}$  à travers  $\partial \Sigma$  et par la résultante des forces extérieures  $\overrightarrow{\mathcal{F}_{\Sigma ext}}$  qui s'appliquent sur  $\Sigma$ .

$$\overrightarrow{\mathcal{V}_{\Sigma}} = \overrightarrow{\mathcal{F}_{\partial \Sigma}} + \overrightarrow{\mathcal{F}_{\Sigma ext}}$$

## 8.2.1 Adaptation du terme de variation de quantité de mouvement

Comme le volume  $\Sigma$  est supposé fixe et que  $\rho \overrightarrow{u}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  en temps, on a :

$$\overrightarrow{\mathcal{V}_{\Sigma}} = \frac{d}{dt} \left( \int_{\Sigma} \overrightarrow{u} \, dm \right) = \frac{d}{dt} \left( \int_{\Sigma} \rho \, \overrightarrow{u} \, dV \right) = \int_{\Sigma} \frac{\partial \left(\rho \, \overrightarrow{u}\right)}{\partial t} dV$$

### 8.2.2 Adaptation du terme de flux de quantité de mouvement

Le flux de quantité de mouvement à travers une surface élémentaire dS correspond à la quantité de mouvement vectorielle des molécules qui ont traversé dS pendant une durée élémentaire dt. En raisonnant coordonnée par coordonnée dans un repère orthonormée fixe et en appliquant la formule de Green-Ostrogradski, il vient en termes vectoriels :

$$\overrightarrow{\mathcal{F}_{\partial\Sigma}} = -\int_{\partial\Sigma} \rho\left(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n_{dS}}\right) \overrightarrow{u} dS = -\int_{\partial\Sigma} \left(\rho \overrightarrow{u} \otimes \overrightarrow{u}\right) dS \overrightarrow{n_{dS}} = -\int_{\Sigma} \operatorname{div}\left(\rho \overrightarrow{u}^{\,t} \overrightarrow{u}\right) dV$$

### 8.2.3 Adaptation du terme de résultante des forces extérieures

Il ne reste plus qu'à expliciter l'expression du dernier terme. Pour cela, on va effectuer le bilan des forces qui s'exercent sur  $\Sigma$  dont les ordres de grandeur sont récapitulés dans le tableau ci-dessous.

- 1. Les forces de pesanteur  $\overrightarrow{F_{pe}} = \int_{\Sigma} \rho \overrightarrow{g} dV.$
- 2. Les forces de pression  $\overrightarrow{F}_{pr} = -\int_{\partial \Sigma} p dS \overrightarrow{n_{dS}}$ . 3. Les forces de frottement fluide  $\overrightarrow{F}_{fr} = -\int_{\Sigma} \frac{\lambda \rho \|\overrightarrow{u}\| \overrightarrow{u}}{2D} dV$ .

Grandeur	Notation	Ordre de grandeur	Valeur
Force de pesanteur	$\ \int_{cana}\rho\overrightarrow{g}dV\ $	$\rho \  \overrightarrow{g} \  SL$	$3.3 \ 10^7$ N
Force de pression	$\ \int_{\partial cana} p dS \overrightarrow{n_{dS}}\ $	$\pi PDL$	1.9 10 <sup>12</sup> N
Force de frottement	$\ \int_{cana} \frac{\lambda \rho \ \overrightarrow{u}\  \overrightarrow{u}}{2D} dV\ $	$\frac{\lambda\rho U^2}{2D}SL$	$1.4 \ 10^5$ N

En appliquant la formule de Green Ostrogradski, il en résulte que :

$$\overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{F_{pe}} + \overrightarrow{F_{pr}} + \overrightarrow{F_{fr}} = \int_{\Sigma} \left[ \rho \overrightarrow{g} - \overrightarrow{\nabla} \left( p \right) - \frac{\lambda \rho \| \overrightarrow{u} \| \overrightarrow{u}}{2D} \right] dV$$

## 8.2.4 Formulation locale de la conservation de la quantité de mouvement

En reportant l'expression de chaque terme dans l'égalité précédente, on obtient finalement :

$$\int_{\Sigma} \left[ \frac{\partial \left( \rho \overrightarrow{u} \right)}{\partial t} + \operatorname{div} \left( \rho \overrightarrow{u}^{t} \overrightarrow{u} \right) + \overrightarrow{\nabla} \left( p \right) + \frac{\lambda \rho \| \overrightarrow{u} \| \overrightarrow{u}}{2D} - \rho \overrightarrow{g} \right] dV = 0$$

Cette formulation globale étant valable pour un volume  $\Sigma$  que lconque, on obtient la formulation locale suivante :

$$\frac{\partial \left(\rho \overrightarrow{u}\right)}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho \overrightarrow{u}^{t} \overrightarrow{u}\right) + \overrightarrow{\nabla}\left(p\right) + \frac{\lambda \rho \|\overrightarrow{u}\| \overrightarrow{u}}{2D} - \rho \overrightarrow{g} = 0.$$

On a ainsi obtenu deux équations d'évolution mettant en jeu trois inconnues : la pression p, la masse volumique  $\rho$  et le vecteur vitesse  $\vec{u}$ . Par conséquent, il manque une équation pour résoudre le problème : l'équation d'état du gaz réel  $PM = \rho ZRT$  dont l'expression dépend d'un facteur Z qu'il convient maintenant de préciser.

## 8.3 Choix de la formulation du facteur de compressibilité

Partant de l'équation d'état issue du modèle du gaz parfait  $PM = \rho RT$ , la pratique usuelle de modélisation d'un gaz réel consiste à ajouter un terme correctif Z appelé facteur de compressibilité et dont l'expression est à préciser dans l'équation d'état  $MP = Z\rho RT$ . C'est notamment grâce à la compressibilité du gaz que le stock en conduite peut se former. Il doit donc être pris en compte dans notre modélisation.

## 8.3.1 Utilisation habituelle de tables et de corrélations empiriques

On sait que le comportement d'un gaz réel diffère de celui du gaz parfait notamment parce que les hypothèses restrictives du modèle ne s'avèrent plus vérifiées : aucune interaction entre les molécules hormis les chocs élastiques. C'est le cas de notre modélisation ( $P \sim 40-80$  bara) comme on peut le voir sur la figure 8.1.



FIGURE 8.1 – A T = 12 °C, on a tracé l'allure de la pression en fonction de la masse volumique du gaz naturel et celle du gaz parfait dans les domaines de pression qui nous concerne (40–80 bara).

Faute de pouvoir s'appuyer sur des lois physiques, la loi d'état d'un gaz est souvent une corrélation empirique issue de l'étude des tables thermodynamiques. Le facteur de compressibilité dépend donc de la composition du gaz, de la température et de la pression. Une formule du facteur de compressibilité moyen  $Z_m$  est couramment utilisée dans l'industrie gazière [3] :

$$Z_m = 1 + 10^{-5} \frac{P_m}{1050} \left( \frac{PCS_N}{3.6 \ 10^7} + d_N - 1 \right) \left( 3.6 - \frac{4(T - 273.15)}{100} \right)$$
(8.1)

#### 8.3.2 Raisonnement théorique effectué sur l'équation d'état

Voici un raisonnement simple qui va justifier le fait que l'on peut prendre le facteur de compressibilité comme fonction linéaire de la pression. On fixe désormais la température à  $T \sim 12$  °C et on veut obtenir une relation entre Z et P. Pour cela, on part de l'équation d'état du gaz réel. La température et la composition du gaz étant supposées fixes, on a donc :

$$P = \rho Z(P) \frac{RT}{M}.$$

L'approche mathématique incite à considérer la pression et la masse volumique non plus comme des quantités physiques mais comme des nombres réels que l'on notera P et  $\rho$ . Ils peuvent alors prendre toutes les valeurs possibles, y compris négatives.

Un zoom arrière de la figure 8.1 nous incite à considérer P comme une fonction homographique de  $\rho$  comme on peut le voir sur la figure 8.2 :

$$P = \frac{a\rho + b}{c\rho + d}$$

où a, b, c et d des paramètres que l'on va déterminer à partir de considérations physiques simples. La relation obtenue sera alors valide physiquement seulement dans le domaine de pression 40 - 80 bara.



FIGURE 8.2 – Vision mathématique de l'équation d'état.

#### **Contraintes physiques**

1. La courbe doit passer par l'origine. On impose donc :

$$P(\rho = 0) = 0 \Longleftrightarrow b = 0.$$

2. Le comportement du gaz réel tend vers celui du gaz parfait lorsque la pression devient nulle :

$$\frac{\partial P}{\partial \rho}(\rho = 0) = \frac{RT}{M} \iff \frac{a}{d} = \frac{RT}{M}.$$

3. L'asymptote horizontale a pour équation P<sub>fictif</sub> = 1/δ > 0 avec la condition P<sub>fictif</sub> n'est pas du même ordre de grandeur que P : on note P<sub>fictif</sub> >> P. Cela fournit a/c = 1/δ.
En reportant ces trois conditions dans l'équation d'état, on obtient après calculs :

$$P = \underbrace{1 - \delta P}_{Z} \frac{\rho RT}{M} \tag{8.2}$$

Cette vision fournit un facteur de compressibilité qui dépend linéairement de la pression. Il faut également rappeler que les conditions  $P_{fictif} >> P$  ou encore  $\delta P \ll 1$  ainsi que  $\delta > 0$  doivent être vérifiées.

### 8.3.3 Comparaison des formulations théorique et empirique

En comparant les équations (8.1) et (8.2), on constate que leur forme est identique. Une identification des coefficients fournit une expression pour  $\delta$ :

$$\delta = \frac{10^{-5}}{1050} \left( \frac{PCS_N}{3.6 \ 10^7} + d_N - 1 \right) \left( 3.6 - \frac{4(T - 273.15)}{100} \right)$$

Afin de valider la relation  $Z = 1 - \delta P$ , il ne reste plus qu'à vérifier les conditions  $\delta > 0$  et  $\delta P \ll 1$  en calculant un ordre de grandeur de  $\delta$ , ce qui est réalisé dans le tableau suivant.

Grandeur	Ordre de grandeur	Condition
δ	$2 \ 10^{-8} \ \mathrm{Pa}^{-1}$	> 0
$\delta P$	0.1	<< 1

## 8.4 Obtention du système d'équations d'évolution

## 8.4.1 Hypothèse d'un écoulement monodimensionnel

Les écoulements gazeux considérés sont importants  $(Q_N \sim 80\ 000 - 450\ 000\ \text{Nm}^3.\text{h}^{-1})$ . On peut donc raisonnablement supposer que la partie significative des phénomènes de masse et de quantité de mouvement s'exprime dans la direction de l'écoulement.

On décide alors de ne considérer plus qu'une seule variable d'espace. Le repère spatial sera ainsi constitué d'une droite d'axe (Ox) celui du cylindre, de direction  $\overrightarrow{e_x}$  celle de l'écoulement et d'origine O l'entrée du cylindre.

On projette alors l'équation vectorielle de la quantité de mouvement sur  $\overrightarrow{e_x}$ . On définit la vitesse algébrique  $u(x,t) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{e_x}$ . La canalisation étant horizontale, la composante suivant  $\overrightarrow{e_x}$  de la force de pesanteur est nulle. On obtient alors le système suivant.

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \left(\rho u\right)}{\partial x} = -\frac{\rho_N Q_{Ncccg}}{S} \delta_{cccg}(x) \\ \frac{\partial \left(\rho u\right)}{\partial t} + \frac{\partial \left(\rho u^2\right)}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\lambda \rho u|u|}{2D} \end{cases}$$

# 8.4.2 Hypothèse d'un écoulement où l'accélération est négligeable vis-à-vis des forces considérées

Dans le cadre d'étude dynamique des écoulements de gaz en conduite industrielle, le calcul et l'expérience montrent que les termes relatifs à l'inertie sont négligeables vis-à-vis des forces visqueuses et de pression considérées [1].

Comme le montre le tableau ci-dessous, les forces d'inertie ne sont pas forcément négligeables par rapport aux autres forces considérées. Cependant, dans [18], il est démontré que la dynamique d'une canalisation peut être synthétisée par une constante de temps  $\tau_{cana}$  de l'ordre du quart d'heure, durée très grande devant la constante de temps d'un choc  $\tau_{choc}$  qui est de l'ordre de la minute.

Grandeur	Notation	Ordre de grandeur	Valeur
Constante de temps	$ au_{cana}$	$\frac{\lambda M}{2RT} \frac{L^2 U}{D}$	16 min
Durée d'un choc	$ au_{choc}$	$\frac{ZL}{2}\sqrt{\frac{\rho_N}{P_a}}$	2 min
Inertie locale	$\ \frac{d}{dt}\left(\int_{cana}\rho\overrightarrow{u}dV\right)\ $	$\frac{\rho U}{\tau_{cana}}SL$	$10^4$ N
Inertie convective	$\ \int_{\partial cana}\rho u\ \overrightarrow{u}\ dS\ $	$\pi \rho U^2 DL$	1.2 10 <sup>8</sup> N

#### 8.4.3 Hypothèse d'un écoulement isotherme

Dans un contexte où l'on étudie des phénomènes d'écoulement adiabatique sans phénomène de détente brutale, il est courant de considérer la température constante et uniforme.

En effet, d'après [18], la constante de temps associée à la température est de l'ordre de la journée ce qui est très grand par rapport aux durées étudiées de l'ordre de  $\tau_{cana} \sim 15$  min.

On peut également remarquer que cette hypothèse découple les effets dynamiques des effets thermiques dont on ne se préoccupera plus désormais. On abandonne donc la conservation de l'énergie. Sous ces trois hypothèses, le système prend alors la forme suivante.

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} = -\frac{\rho_N Q_{Ncccg}}{S} \delta_{cccg}(x) \\ \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\lambda \rho u |u|}{2D} \end{cases}$$

#### La pression et le débit normalisé comme variables de travail 8.4.4

L'équation d'état du gaz du gaz  $PM = \rho ZRT$  est maintenant utilisée pour obtenir un système de deux équations à deux inconnues : le débit normalisé  $Q_N$  et la pression P. Le système précédent devient alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{P}{Z}\right) + \beta \frac{\partial Q_N}{\partial x} = -\beta Q_{Ncccg} \delta_{cccg}(x) \\ \frac{2P}{Z} \frac{\partial P}{\partial x} = -\alpha Q_N |Q_N| \end{cases}$$
(8.3)

où l'on retrouve deux paramètres caractéristiques positifs dont les ordres de grandeurs sont calculés dans le tableau ci-dessous :

- un paramètre de temps  $\beta = \frac{RT}{M} \frac{\rho_N}{S}$  qui est inversement proportionnel à  $D^2$ ;
- un paramètre d'espace  $\alpha = \frac{\lambda \rho_N^2}{DS^2} \frac{RT}{M}$  qui est inversement proportionnel à  $D^5$ .

Grandeur	Notation	Expression	Ordre de grandeur
Paramètre d'espace	α	$\frac{\lambda \rho_N^2}{DS^2} \frac{RT}{M}$	$10^{-11}$ bara <sup>2</sup> .km <sup>-1</sup> .Nm <sup>-6</sup> .h <sup>2</sup>
Paramètre de temps	β	$\frac{RT}{M}\frac{\rho_N}{S}$	$10^{-3}$ bara.km.Nm <sup>-3</sup>

## Chapitre 9

# Une équation non-linéaire simplifiée en une équation de la chaleur

## 9.1 Etablissement de l'équation d'évolution de la pression

### 9.1.1 Hypothèse d'un écoulement unidirectionnel

La direction du repère spatial a été prise dans le sens de l'écoulement. On va supposer que ce sens ne changera pas durant toute l'expérience. Cela suppose donc que  $Q_N > 0$ . le système (8.3) devient alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{P}{Z} \right) + \beta \frac{\partial Q_N}{\partial x} = -\beta Q_{Ncccg} \delta_{cccg}(x) \\ \frac{2P}{Z} \frac{\partial P}{\partial x} = -\alpha Q_N^2 \end{cases}$$

En utilisant la deuxième égalité de ce système, on vérifie facilement que  $\frac{\partial P}{\partial x} < 0$ . Ceci est physiquement rassurant et justifie l'hypothèse réalisée.

En effet, les conditions de bords sont de telle sorte que le bilan de masse sur la canalisation est négatif : la CCCG vide le gaz en conduite. La raréfaction du gaz entraîne alors une baisse de la pression. Par conséquent, on est sûr que la pression chute et c'est-à-dire que  $\frac{\partial P}{\partial x} < 0$ .

## 9.1.2 Découplage du système d'équation

L'hypothèse précédente nous permet de découpler simplement le système d'équation. Grâce à la deuxième égalité du système précédent, on a  $Q_N = \sqrt{-\frac{2P}{\alpha Z}\frac{\partial P}{\partial x}}$ . On injecte ceci dans la première égalité. On obtient alors une équation d'évolution de la pression qui possède une unique solution faible<sup>1</sup>.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{P}{Z}\right) + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{\frac{-2P}{Z}} \frac{\partial P}{\partial x}\right) = -\beta Q_{Ncccg} \delta_{cccg}(x)$$
(9.1)

<sup>1.</sup> cf. Annexes pour une démonstration de l'existence et de l'unicité mathématique.

## 9.2 Obtention d'une équation de la chaleur

Notre objectif étant d'obtenir des ordres de grandeur sur la solution de cette équation, nous allons faire des hypothèses en vue d'obtenir une formule explicite de la solution P.

### 9.2.1 Linéarisation de la dérivée spatiale autour de l'état initial

On cherche à supprimer la racine présente dans la dérivée spatiale de l'équation d'évolution. Pour cela, on linéarise celle-ci autour de l'état initial. On utilise alors le fait que le débit initial  $Q_{Ne}$  est constant dans la canalisation. Cette hypothèses est fondamentale pour l'élaboration du modèle et on verra que des conditions de bords différentes ou un état initial avec un débit constant par morceaux nécessitera des adaptations<sup>2</sup>.

$$Q_N^2 \approx Q_{Ne}(2Q_N - Q_{Ne}) \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left( \sqrt{-\frac{2P}{\alpha Z} \frac{\partial P}{\partial x}} \right) = -\frac{1}{\alpha Q_{Ne}} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{P}{Z} \frac{\partial P}{\partial x} \right)$$

Comme on le verra dans la quatrième partie, bien que le modèle soit linéarisé autour de l'état initial, il reste valable très longtemps après celui-ci. Ceci repose sur la constatation que le débit moyen  $Q_{Nm}(t)$  reste proche de  $Q_{Ne}$ . En effet, la conservation de la quantité de mouvement écrite sous forme conservative s'intègre facilement entre 0 et L pour laisser apparaître la moyenne quadratique du débit normalisé :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \underbrace{\frac{P}{\delta} + \frac{\log Z}{\delta^2}}_{w(P)} \right) = \alpha Q_N^2 \Longrightarrow w(P)_{sortie}(t) - w(P)_{entree}(t) = \alpha L Q_{Nm2}^2(t).$$

La CCCG étant située au milieu, la symétrie du problème du problème suggère que la manière dont va varier en temps la pression à l'entrée et à la sortie sera similaire. C'est ce que l'on observera sur le modèle simplifié<sup>3</sup>. On peut donc écrire :

$$\alpha LQ_{Nm2}^2(t) = w(P)_{sortie}(t) - w(P)_{entree}(t) \approx w(P)_{sortie}(0) - w(P)_{entree}(0) = \alpha LQ_{Ne}^2.$$

On obtient finalement que la linéarisation par rapport à l'état initial, du fait des conditions de bords et de la symétrie du problème, n'est autre qu'une linéarisation par rapport au débit moyen :

$$Q_{Nm2}(t) \approx Q_{Ne}$$

En sortant le facteur de compressibilité de la dérivée temporelle et en utilisant l'approximation précédente, l'équation (9.1) prend maintenant la forme :

$$\frac{1}{Z^2}\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\beta}{\alpha Q_e}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{P}{Z}\frac{\partial P}{\partial x}\right) = -\beta Q_{Ncccg}\delta_{cccg}(x)$$

<sup>2.</sup> cf. Généralisation du modèle

<sup>3.</sup> cf. Exploitation du modèle pour une description du modèle simplifié.

#### 9.2.2 Indépendance spatiale du facteur de compressibilité

On suppose de plus que le facteur de compressibilité ne dépend pas beaucoup de la variable spatiale. On remplace donc dans l'égalité précédente le facteur de compressibilité Z(x,t) par sa moyenne spatiale  $Z_m(t)$  ce qui permet de faire apparaître une dérivée seconde.

$$\frac{1}{Z_m^2(t)}\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\beta}{2\alpha Z_m(t)Q_{Ne}}\frac{\partial^2\left(P^2\right)}{\partial x^2} = -\beta Q_{Ncccg}\delta_{cccg}(x)$$

Cette hypothèse est déjà effectuée pour calculer la pression en régime permanent dans l'industrie gazière. En effet, pour la pression initiale  $P_0$ , on a :

$$\frac{\partial P_0^2}{\partial x} = -\alpha Z(x,0)Q_{Ne}^2 \approx -\alpha Z_m(0)Q_{Ne}^2 \Longrightarrow P_0(x) = P(x,0) = \sqrt{P(0,0) - \alpha Z_m(0)Q_{Ne}^2 x}.$$

On calcule  $Z_m(0)$  par résolution d'un équation du second degré. On note  $P_e = P(0,0)$ . On introduit un nouveau coefficient de pertes de charges initiales  ${}^4 \eta_{ini} = \alpha Z_m(0)Q_{Ne}^2$  et on obtient alors simplement l'égalité  $P_0^2(x) = P_e^2 - \eta_{ini}x$ . Le tableau ci-dessous résume le calcul de l'état initial dont une description détaillée est effectuée dans la quatrième partie.

Grandeur	Notation	Expression	Valeur
Pression initiale à l'entrée	$P_e$	P(0,0)	67 bara
Pression moyenne initiale	$P_{m2}(0)$	$P_{m2}^{2}(0) = P_{e}^{2} - \alpha \left(1 - \delta P_{m2}(0)\right) Q_{Ne}^{2} \frac{L}{2}$	61.6 bara
Pertes de charges initiales	$\eta_{ini}$	$\alpha Z_{m2}(0)Q_{Ne}^2$	$6.9 \text{ bara}^2.\text{km}^{-1}$
Pression initiale	$P_0(x)$	$\sqrt{P_e^2 - \eta_{ini}x}$	

### 9.2.3 Choix de la variable de travail

Le système (8.3) fait apparaîte deux choix possibles pour la variable de travail :  $\frac{P}{Z}$  ou  $P^2$ . La première, proportionnelle à  $\rho$ , est issue de la conservation de la masse alors que la deuxième provient de la conservation de la quantité de mouvement.

Finalement, on choisira  $P^2$  pour deux raisons. D'une part, les deux approches ont été effectuées<sup>5</sup> et donnent de meilleurs résultats pour  $P^2$  sur les simulations. D'autre part, le passage d'une expression explicite de  $P^2$  à P ne nécessite qu'un passage à la racine, processus mathématique simple. Au contraire, la variable  $\frac{P}{1-\delta P}$  nécessite d'inverser une homographie.

<sup>4.</sup> On appellera pertes de charges une perte de pression par rapport à la pression d'entrée initiale  $P_e$ . On verra qu'il y en aura de trois types différents.

<sup>5.</sup> cf. Annnexes pour une discussion entre la modélisation présentée ici et une modélisation P/Z.

On multiplie donc l'équation d'évolution précédente par  $2P_m(t)$  de chaque côté de l'égalité et on linéarise en espace la dérivée temporelle de  $P^2$  ce qui donne  $2P_m(t)\frac{\partial P}{\partial t} \approx \frac{\partial (P^2)}{\partial t}$ . On obtient alors après réorganisation des termes :

$$\frac{\partial \left(P^2\right)}{\partial t} - \frac{\beta P_m(t) Z_m(t)}{\alpha Q_{Ne}} \frac{\partial^2 \left(P^2\right)}{\partial x^2} = -2\beta P_m(t) Z_m(t)^2 Q_{Ncccg} \delta_{cccg}(x).$$

### 9.2.4 Une équation de la chaleur qui possède une solution explicite

Enfin, pour obtenir un calcul explicite de la solution de l'équation de la chaleur, on veut que le terme source soit proportionnel au coefficient de diffusivité noté  $\gamma(t)$ . Cette approximation simplifiera les calculs. On va supposer que  $Z_m(t)^2 = Z_m(0)Z_m(t)$ . Il vient alors :

$$\frac{\partial \left(P^{2}\right)}{\partial t} - \gamma(t) \frac{\partial^{2} \left(P^{2}\right)}{\partial x^{2}} = -\gamma(t) \eta_{espace_{cccg}} \delta_{cccg}(x).$$
(9.2)

où deux coefficients qu'il convient de calculer apparaissent :

- le coefficient de diffusivité  $\gamma(t) = \frac{\beta P_m(t) Z_m(t)}{\alpha Q_e}$  qui dépend du temps et qui est proportionnel à la pression moyenne et au facteur de compressibilité moyen;
- un terme source  $\eta_{espace_{cccg}} = 2Z_m(0)\alpha Q_{Ne}Q_{Ncccg}$  dont l'expression et la valeur ressemble fortement à celle du coefficient de pertes de charges initiales  $\eta_{ini} = \alpha Z_m(0)Q_{Ne}^2$  et dont on verra<sup>6</sup> qu'il correspond aux pertes de charges spatiales dues à la CCCG.

Grandeur	Notation	Expression	Ordre de grandeur
Coefficient de diffusivité	$\gamma(t)$	$\frac{\beta P_m(t) Z_m(t)}{\alpha Q_e}$	$7255 \text{ km}^2.\text{h}^{-1}$
Pertes de charges spatiales	$\eta_{espace_{cccg}}$	$2Z_m(0)\alpha Q_{Ne}Q_{Ncccg}$	$7.3 \text{ bara}^2.\text{km}^{-1}$

## 9.3 Résolution de l'équation de l'équation de la chaleur

On a obtenu une équation de la chaleur ce qui montre que la propagation du phénomène de la CCCG est une diffusion. Il s'agit maintenant de résoudre l'équation (9.2).

<sup>6.</sup> Cette dénomination prendra tout son sens dans l'élaboration du modèle simplifié.

## 9.3.1 Calcul du coefficient de diffusivité

Afin de calculer  $\gamma(t)$ , il convient de trouver une expression pour  $P_m(t)$  et c'est la conservation de la masse qui va nous la fournir :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{P}{Z} \right) + \beta \frac{\partial Q}{\partial x} = -\beta Q_{Ncccg} \delta_{cccg}(x)$$

En l'intégrant entre 0 et L, en remarquant que  $Q_N(0,t) = Q_N(L,t) = Q_{Ne}$ , il vient simplement :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{P}{Z}\right)_m = -\frac{\beta Q_{Ncccg}}{L} \Longrightarrow \left(\frac{P}{Z}\right)_m(t) = \left(\frac{P}{Z}\right)_m(0) - \frac{\beta Q_{Ncccg}}{L}t$$

Afin de retrouver  $P_m(t)$ , on fait alors l'hypothèse que  $\frac{P_m(t)}{Z_m(t)} \approx \left(\frac{P}{Z}\right)_m(t)$ . Cette hypothèse est loin d'être évidente. Cependant elle est vérifiée dans notre cas car on a  $\delta P \ll 1$ .

Voici ci-dessous les profils temporels et les erreurs relatives commises sur les différentes pressions moyennes pour deux expériences<sup>7</sup> effectuées grâce à Simone respectivement dans un cas très contraint et dans un cas peu contraignant.



<sup>7.</sup> cf. respectivement le cas 01 et le cas 07 durant la validation du modèle.



Erreur relative commise en remplaçant la moyenne des rapports par le rapport des moyennes [%]

Calcul des différentes pressions moyennes sur Simone pour le cas de validation 07

Qcccg = 160000 Nm<sup>3</sup>/h Qe = 450000 Nm<sup>3</sup>/h Pe = 80 bara L = 230 km xcccg = 110 km D = 1 m M = 16.043 g/mol PCS = 11.4 kWh/Nm<sup>3</sup> T = 20 °C ke = 20  $\mu$ m





D'une part, on peut remarquer que remplacer la moyenne d'ordre 1 par une moyenne quadratique peut engendrer des erreurs non négligeables dans un cas très contraint (>5%) alors que dans un autre cas, ce ne sera pas du tout le cas (erreur < 0.03%). Cette remarque sera à garder à l'esprit pour distinguer la pression moyenne calculées dans la formule de l'état initial (norme 2) et dans les paramètres du modèle issus du bilan de masse (norme 1).

D'autre part, on voit que dans les deux cas, l'hypothèse consistant à remplacer la moyenne du rapport par le rapport des moyennes est justifiée avec une erreur inférieure à 1% même dans un cas très contraignant. Pour obtenir des ordres de grandeur mathématique, on effectue un développement limité en utilisant le fait que  $\delta P \ll 1$  puis on majore sachant que  $P_{m2} \ge P_{m1}$ . On obtient :

$$0 \leqslant \frac{\left(\frac{P}{Z}\right)_{m1} - \frac{P_{m1}}{Z_{m1}}}{\left(\frac{P}{Z}\right)_{m1}} \leqslant \frac{\delta(P_{m2}^2 - P_{m1}^2)}{P_{m1} + \delta P_{m2}^2} \lesssim 2\delta P_{m2} Z_{m2} \frac{P_{m2} - P_{m1}}{P_{m1}}.$$

L'erreur commise est par conséquent d'un ordre de grandeur inférieure aux erreurs commises en remplaçant norme 2 par norme 1 soit 1%. Revenons à l'expression trouvée par le bilan de masse. En inversant la fonction homographique, on obtient finalement  $P_m(t)$  puis l'expression du coefficient de diffusion  $\gamma(t)$ .

$$\gamma(t) = \frac{Z_m(0)\beta}{\alpha Q_{Ne}} \frac{P_m(0) - \frac{Z_m(0)\beta Q_{Ncccg}}{L}t}{\left(1 + \delta \frac{Z_m(0)\beta Q_{Ncccg}}{L}t\right)^2}$$

En utilisant toujours la condition  $\delta P \ll 1$ , on peut calculer une expression approchée sous forme d'un polynôme à l'aide d'un développement limité de  $\gamma(t)$ .

$$\gamma(t) \approx \frac{\beta Z_{m1}(0)}{\alpha Q_{Ne}} \left[ P_{m1}(0) - \left(\underbrace{1 - 2\delta P_{m1}(0)}_{\approx Z_{m1}(0)}\right) \frac{Z_{m1}(0)\beta Q_{Ncccg}}{L} t \right]$$

L'approximation  $1 - 2\delta P_{m1}(0) \approx Z_{m1}(0)$  permet ici de compenser le fait qu'on arrête le développement limité à l'ordre un. On essaye alors de faire apparaître le coefficient des pertes de charges spatiales. Après réorganisation des termes, on obtient plus simplement :

$$\gamma(t) \approx \frac{2L}{\eta_{espace_{cccg}}} \left( P_{m1}(0)\eta_{temps_{cccg}} - \eta_{temps_{cccg}}^2 t \right).$$

Cette expression linéaire simplifiée de  $\gamma(t)$  fait apparaître un nouveau coefficient qui, on le verra, caractérisera les pertes de charges temporelles (il s'exprime en bars par heure). Le tableau ci-dessous résume les différents paramètres du modèle.

Grandeur	Notation	Expression	Ordre de grandeur
Pertes de charges spatiales	$\eta_{espace_{cccg}}$	$2Z_{m1}(0)\alpha Q_{Ne}Q_{Ncccg}$	$7.3 \text{ bara}^2 \text{.km}^1$
Pertes de charges temporelles	$\eta_{temps_{cccg}}$	$\frac{Z_{m1}^2(0)\beta Q_{Ncccg}}{L}$	$2.2 \text{ bara.h}^{-1}$
Diffusivité approchée	$\gamma(t)$	$\frac{2L}{\eta_{espace_{cccg}}} \left( P_{m1}(0)\eta_{temps_{cccg}} - \eta_{temps_{cccg}}^2 t \right)$	$7255 \text{ km}^2.\text{h}^1$

Remarquons enfin que  $\gamma(t) = \frac{\beta P_{m1}(t) Z_{m1}(t)}{\alpha Q_{Ne}}$  est toujours positif tant que la pression moyenne l'est et qu'en reprenant l'expression de  $\gamma(t)$ , on voit que le coefficient de diffusisité est une fonction décroissante du temps.

Or, deux phénomènes opposés se produisent : la pression moyenne  $P_{m1}(t)$  tend à faire décroître le coefficient de diffusivité alors que le facteur de compressibilité moyen  $Z_{m1}(t)$  tend à le faire croître<sup>8</sup>. La décroissance de  $\gamma(t)$  implique donc une prédominance du premier effet sur le second.

<sup>8.</sup> L'influence du facteur de compressibilité dans les pertes de charges temporelles avait déjà été mise en évidence dans [8].

## 9.3.2 Changement de variable afin d'obtenir des conditions de bords de type Neumann nulles

L'avantage de l'équation de la chaleur est qu'elle se résout explicitement si les conditions de bords sont nulles. On sait que  $\frac{\partial (P_0^2)}{\partial x}$  est constant. On peut donc retrancher la solution de son état initial dans l'équation de la chaleur (9.2). On pose  $U = P^2 - P_0^2$ . Le problème devient une équation de la chaleur avec des conditions de type Neumann nulle au bord et une condition initiale nulle :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} - \gamma(t) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\eta_{espace_{cccg}} \gamma(t) \delta_{cccg}(x) \\ U(x,0) = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial U}{\partial x}(L,t) = 0 \end{cases}$$

#### 9.3.3 Développement des termes en série de Fourier

On veut développer le dirac en série de Fourier. Pour cela, on rend le dirac 2L périodique. Les conditions de bords de type Neumann suggèrent de symétriser de manière paire le dirac puis de translater la fonction obtenue. On obtient un peigne de dirac qui coïncide avec le dirac sur [0, L]. On calcule alors ses coefficients de Fourier :

$$\delta_{cccg}(x) = \frac{1}{L} + \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \cos\left(\frac{n\pi x_{cccg}}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right].$$

De plus, on suppose que la solution est développable en série de Fourier soit :

$$U = a_0(t) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ a_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right].$$

En reportant les deux dernières sommes dans l'équation et en identifiant les coefficients, on obtient :

$$\begin{cases} a_0'(t) = -\frac{\eta_{espace_{cccg}}\gamma(t)}{L} \\ a_n'(t) + \frac{n^2\pi^2}{L^2}\gamma(t)a_n(t) = -\frac{2\eta_{espace_{cccg}}}{L}\gamma(t)\cos\left(\frac{n\pi x_{cccg}}{L}\right) \\ b_n'(t) + \frac{n^2\pi^2}{L^2}\gamma(t)b_n(t) = 0 \end{cases}$$

Les conditions de bords et la condition initiale nulles fournissent des simplifications supplémentaires :

$$\begin{cases} a_0(0) = a_n(0) = b_n(0) = 0\\ b_n(t) = 0 \end{cases}$$

Il en résulte que l'on obtient la solution sous forme de série de Fourier :

$$P^{2}(x,t) = P_{0}^{2}(x) - \eta_{espace_{cccg}} \left[ \frac{\int_{0}^{t} \gamma(s)ds}{L} + \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{L}{n\pi}\right)^{2} \cos\left(\frac{n\pi x_{cccg}}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left(1 - e^{-\frac{n^{2}\pi^{2} \int_{0}^{t} \gamma(s)ds}{L^{2}}}\right) \right]$$

On voit ici apparaître une somme de deux termes plus une série de Fourier, chacun étant caractérisé par un coefficient et ayant un rôle propre dans le phénomène des pertes de charges. Le tableau ci-dessous résume les paramètres du modèle.

F			
Grandeur	Notation	Expression	Ordre de grandeur
Pertes de charges initiales	$\eta_{ini}$	$\alpha Z_{m2}(0)Q_{Ne}^2$	$6.9 \text{ bara}^2.\text{km}^{-1}$
Pression initiale	$P_0(x)$	$\sqrt{P_e^2 - \eta_{ini}x}$	
Pertes de charges spatiales	$\eta_{espace_{cccg}}$	$2Z_{m1}(0)\alpha Q_{Ne}Q_{Ncccg}$	7.3 $bara^2.km^1$
Pertes de charges temporelles	$\eta_{temps_{cccg}}$	$\frac{Z_{m1}^2(0)\beta Q_{Ncccg}}{L}$	$2.2 \text{ bara.h}^{-1}$
Intégrale de la diffusivité	$\frac{-\eta_{espace_{cccg}}}{L}\int_{0}^{t}\gamma(s)ds$	$= \frac{2Z_{m1}(0)}{\delta^2} \left[ Z_{m1}(0) - \frac{Z_{m1}(0)}{1 - \delta \frac{\eta_{temps_{cccg}}}{Z_{m1}(0)} t} \right]$	$-\log\left(1-\deltarac{\eta_{temps_{cccg}}}{Z_{m1}(0)}t ight)$
Intégrale approchée	$\frac{-\eta_{espace_{cccg}}}{L}\int_{0}^{t}\gamma(s)ds$	$-2P_{m1}(0)\eta_{temps_{cccg}}t + \eta_{temps_{cccg}}^2t^2$	

Les pertes de charges initiales et temporelles ont été étudiées. Il convient maintenant de s'intéresser à la série de Fourier.

## 9.3.4 Etude de la série de Fourier

On rappelle ici l'expression de la série de Fourier notée  $S_{fourier}(x,t)$ :

$$S_{fourier}(x,t) = -\frac{2\eta_{espace_{cccg}}}{L} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \cos\left(\frac{n\pi x_{cccg}}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left(1 - e^{-\frac{n^2\pi^2 \int_0^t \gamma(s)ds}{L^2}}\right).$$

Elle est composée de deux termes, un terme indépendant du temps représentant un régime permanent noté f(x) et un terme associé à un régime transitoire qui tend vers 0 au cours du temps.

#### Simplification du terme associé au régime permanent

Le terme f(x) associé à un régime permanent se trouve être la série de Fourier d'une fonction explicitable simple. On pose :

$$f(x) = -\eta_{espace_{cccg}} \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \cos\left(\frac{n\pi x_{cccg}}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Cette fonction est normalement convergente donc continue. Cependant, sa dérivée formelle n'est pas normalement convergente. On va voir que cette fonction n'est pas dérivable sur [0, L]. Cependant, si on se place dans le cadre d'une série de Fourier d'une distribution, en dérivant successivement et formellement deux fois f, on retrouve à un terme près l'expression de la série de Fourier du dirac :

$$f''(x) = -\eta_{espace_{cccg}}\left(\frac{1}{L} - \delta_{cccg}(x)\right).$$

Puis, en intégrant deux fois, on obtient en notant  $Y_{cccg}$  la fonction d'Heavyside en  $x_{cccg}$ :

$$f(x) = f(0) + \underbrace{f'(0)}_{=0} x - \eta_{espace_{cccg}} \left( \frac{x^2}{2L} - (x - x_{cccg}) Y_{cccg}(x) \right)$$

Il s'agit enfin de calculer la constante suivante :

$$f(0) = -\eta_{espace_{cccg}} \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \cos\left(\frac{n\pi x_{cccg}}{L}\right)$$

De la même façon, on peut raisonner en terme formel sur la série de Fourier. Si on pose g(x) = f(0), on obtient après deux dérivations formelles  $g''(x) = -\eta_{espace_{cccg}} \left(\frac{1}{L} - \delta_0(x)\right)$  ce qui fournit après deux intégration successives :

$$f(0) = g(x_{cccg}) = \underbrace{-\eta_{espace_{cccg}}}_{g(0)=-\eta_{espace_{cccg}}} \underbrace{\frac{2}{L}}_{n=1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{L^2}{\pi^2 n^2} + \underbrace{g'(0)}_{=0} x - \eta_{espace_{cccg}}}_{=0} \left( \frac{x_{cccg}^2}{2L} - x_{cccg} \underbrace{Y_0(x_{cccg})}_{=1} \right)$$

En synthétisant tous les résultats, on obtient que le terme permanent de la série de Fourier s'exprime plus simplement sous la forme d'un polynôme d'ordre deux non dérivable en  $x_{cccg}$  mais continue :

$$f(x) = -\eta_{espace_{cccg}} \left[ \frac{x^2 + x_{cccg}^2}{2L} + \frac{L}{3} - \begin{cases} x_{cccg} & \text{si } x \leqslant x_{cccg} \\ x & \text{sinon} \end{cases} \right]$$

Finalement, voici une rapide étude de la fonction f qui peut prendre des valeurs positives ou négatives. La CCCG engendrera donc des pertes de charges ou des gains de charges en fonction d'où on se place sur la canalisation.

$$\begin{cases} f(0) = -\eta_{espace_{cccg}} \left[ \frac{(L - x_{cccg})^2}{2L} - \frac{L}{6} \right] \\ f(x_{cccg}) = -\eta_{espace_{cccg}} \left[ \frac{1}{L} \left( x_{cccg} - \frac{L}{2} \right)^2 + \frac{L}{12} \right] \\ f(L) = -\eta_{espace_{cccg}} \left[ \frac{x_{cccg}^2}{2L} - \frac{L}{6} \right] \end{cases}$$

$$-\frac{\eta_{espace_{cccg}}L}{3} \leqslant f(x) \leqslant \frac{\eta_{espace_{cccg}}L}{6}$$

#### Etude du terme associé au régime transitoire

On peut déjà remarquer que la série de Fourier associé au régime transitoire, c'est-à-dire  $S_{fourier}(x,t) - f(x)$  est normalement convergente. La fonction par conséquent continue.

Par ailleurs, on peut montrer que la série de Fourier associée au régime transitoire converge assez rapidement. Cette remarque nous assure qu'une implémentation informatique de la série tronqué à N a une chance d'approcher la série sans que N ne soit trop elevé. En effet, on a la majoration du reste suivante :

$$\eta_{espace_{cccg}} \frac{2}{L} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left[ \cos\left(\frac{n\pi x_{cccg}}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 e^{-\frac{n^2\pi^2 \int_0^t \gamma(s)ds}{L^2}} \right] \\ \left| \\ \leqslant |f(x)|e^{-\frac{N^2\pi^2 \int_0^t \gamma(s)ds}{L^2}} \leqslant |f(x)|e^{-\frac{N^2\pi^2 \gamma(0)t}{L^2}} \right|$$

Le coefficient de diffusivité étant positif, sa primitive  $\int_0^t \gamma(s) ds$  est une fonction croissante du temps d'où la deuxième inégalité.

En ce qui concerne la durée du régime transitoire, en reprenant le même raisonnement que précédemment, on montre que :

$$|S_{fourier}(x,t) - f(x)| \leq |f(x)|e^{-\frac{\pi^2 \gamma(0)t}{L^2}}.$$

On remarque alors l'apparition d'une constante de temps associée au régime transitoire notée  $\tau_{cccg}$  :

$$\tau_{cccg} = \frac{L^2}{\pi^2 \gamma(0)} = \frac{L\eta_{espace_{cccg}}}{2\pi^2 P_m(0)\eta_{temps_{cccg}}} \sim 33 \text{ min.}$$

# Quatrième partie

Validation du modèle grâce au logiciel de référence Simone

# Chapitre 10

# Calcul des paramètres de la modélisation

On a vu que la solution était caractérisée par quatres paramètres :  $\eta_{ini}$ ,  $\eta_{temps_{cccg}}$ ,  $\eta_{espace_{cccg}}$  et  $\tau_{cccg}$ . Pour obtenir une bonne précision du modèle sur lequel des hypothèses simplificatrices ont déjà été faites, il est nécessaire de pouvoir calculer le plus précisément possible ces coefficients.

## 10.1 Données nécessaires au calcul des paramètres

Les données de base utilisées seront celles d'un cas fictif assez contraingant (diamètre réduit, longueur élevée, débit important). La comparaison entre le modèle et Simone sera donc révélateur de la précision du modèle par rapport à Simone. Les paramètres de ce cas fictif sont détaillés ci-dessous.

Paramètres de référence	Notation	Valeur
Pression atmosphérique	$P_a$	1.01325 bara
Température de référence	$T_0$	0 °C
Constante des gaz parfait	R	$8.314472 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$
Masse molaire de l'air	$M_{air}$	$28.963 \text{ g.mol}^{-1}$
Facteur de compressibilité normalisé de l'air	$Z_{Nair}$	0.99941

Paramètres constants d'une expérience à l'autre	Notation	Valeur
Rugosité apparente de la conduite	ke	$20 \ \mu m$
Masse molaire du gaz	M	$16.043 \text{ g.mol}^{-1}$
Pouvoir calorifique supérieur normalisé du gaz	$PCS_N$	$11.4 \text{ kWh.Nm}^3$
Température intérieure de la canalisation	T	20 °C

Paramètres variant d'une expérience à l'autre	Notation	Valeur
Diamètre intérieur de la conduite	D	0.75 m
Longueur de canalisation	L	400 km
Pression initiale à l'entrée de la canalisation	$P_e$	67 bara
Débit normalisé initial, entrant et sortant	$Q_{Ne}$	$450\ 000\ \mathrm{Nm^3.h^{-1}}$
Débit normalisé de la CCCG	$Q_{Ncccg}$	$160\ 000\ \mathrm{Nm}^3.\mathrm{h}^{-1}$
Emplacement de la CCCG	$x_{cccg}$	200 km

## 10.2 Précisions sur le facteur de compressibilité

Le choix de l'équation d'état du gaz et donc du facteur de compressibilité va fortement influer sur la précision des résultats obtenus. En effet, le coefficient de diffusivité  $\gamma(t) = \frac{\beta P_m(t)Z_m(t)}{\alpha Q_{Ne}}$  est directement proportionnel au facteur de compressibilité  $Z_m(t)$  qui a tendance à compenser la décroissance de  $P_m(t)$ .

Ainsi, le terme du bilan de masse et la durée du régime transitoire sont directement dépendante de la primitive temporelle du coefficient de diffusivité et donc du facteur de compressibilité. On va présenter brièvement les différents type de formule utilisée dans Simone pour le facteur de compressibilité (Redlich-Kwong, AGA, Papay).

## 10.2.1 La formule de Redlich-Kwong issue des méthodes cubiques

Il est clair qu'aux pressions considérées  $P \sim 40 - 80$  bara, le modèle de gaz parfait PV = nRT, dont l'approximation est d'autant meilleure que la pression est faible, n'est plus valable. De plus, c'est grâce à la compressibilité du gaz que du stock en conduite peut se former. On ne peut donc négliger le phénomène de compressibilité.

Empiriquement, on a facilement accès à l'enthalpie libre molaire  $G(T, P, N_{avogadro})$ . Sa dépendance vis à vis de la pression et de la température permet d'établir des tables thermodynamiques précises. On peut alors retrouver toute les propriétés du gaz à partir de cette fonction d'état et en particulier les correctifs à apporter vis à vis du comportement du gaz parfait.

L'équation de Van der Waals  $\left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$  rétablit le fait que le gaz n'est pas compressible indéfiniment et qu'il existe des forces d'interaction entre les molécules. Sa validité à  $T > T_{critique}$  est meilleure que celle du gaz parfait mais n'est valable qu'à faible pression (quelques bars).

Ce modèle ne peut donc être utilisé pour calculer le facteur de compressibilité. Sous Simone, il est possible d'utiliser une formule pour le facteur de compressibilité issue d'une équation de Van der Waals modifiée qualifiée de Redlich-Kwong (1949).

Dans [2], il est expliqué que cette équation vise à l'amélioration de la représentation des fluides réels en modifiant l'expression du terme de pression interne de l'équation de Van der Waals :

$$P = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{n^2 a(T)}{V(V + B)}$$

ce qui conduit à une représentation beaucoup plus satisfaisante, en particulier pour des domaines de température  $T > T_{critique}$ .

A température fixée, le calcul du volume V à une pression P donnée conduit à la résolution d'une équation cubique d'où le nom de ce type de méthode pour calculer le facteur de compressibilité.

#### 10.2.2 La formule de type AGA issue des méthodes viriel

Cependant, il existe d'autres méthodes que celle des équations cubiques. L'équation du viriel, fréquemment utilisée pour représenter les propriétés de phase gazeuse à des pressions modérées. Elle est généralement tronquée à l'ordre deux et donnent une bonne approximation du facteur de compressibilité.

$$Z = \frac{PV}{NRT} = 1 + \frac{A}{V} + \frac{B}{V^2} + \dots$$

L'équation de Benedict, Welb et Rubin (1951, 1942, 1940) qualifiée de BWR dans [2] et accessible sous Simone, est dérivée de cette équation. Elle comporte deux termes complémentaires calculés empiriquement. En notant  $\rho_M = \frac{1}{V_M} = \frac{\rho}{M}$  l'inverse du volume molaire, on obtient l'expression suivante :

$$P = RT\rho_M + \left(B_0RT - A_0 - \frac{C_0}{T^2}\right)\rho_M^2 + (bRT - a)\rho_M^3 + a\alpha\rho_M^6 + \frac{C\rho_M^3}{T^2}\left(1 + \gamma\rho_M^2\right)e^{-\gamma\rho_M^2}.$$

Elle présente l'avantage de pouvoir s'appliquer aux mélanges. Utilisant le même type de méthode, le Groupe Européen de recherche gazière GERG (1991) a permis de calculer le facteur de compressibilité pour un gaz commercial avec une erreur moyenne de 0.06% jusqu'à 120 bara.

La formule du facteur de compressibilité  $Z = 1 - \delta P$  utilisé dans la modélisation en est d'ailleurs une version simplifiée. Celle-ci est couramment utilisée dans l'industrie gazière pour des calculs rapides qui donne une précision sur Z de l'ordre de 0.2% si l'on reste dans des domaines de température 0 °C < T < 40 °C et de pression 40 bara < P < 80 bara. En plus d'une formulation affine simple  $Z = 1 - \delta P$ , elle est donc spécialement adaptée à notre problématique d'écoulement de gaz naturel en conduite industrielle.

Sous Simone, une autre formule possible pour le facteur de compressibilité est issue d'une méthode de type AGA 8. Développée aux Etats-Unis dans l'université de Oaklakama par le Gas Research Institute, elle utilise une équation de Starling :

$$Z = 1 + B\rho + C\rho^{2} + D\rho^{3} + E\rho^{5} + A_{1}\rho^{2} (1 + A_{2}\rho^{2}) e^{-A_{2}\rho^{2}}$$

où les coefficients dépendent de la température du gaz, de sa composition et de ses paramètres moléculaires.

La méthode AGA NX19 calcule un facteur de surcompressibilité  $F_{pv} = \sqrt{\frac{Z_r}{Z}}$  à partir du pourcentage de CO2 et d'azote  $N_2$  présent dans le gaz ainsi que de sa densité. Avec l'approximation  $F_{pv} = \sqrt{\frac{1}{Z}}$ , la justesse de la méthode est de 0.5% à 1% pour le gaz naturel.

### 10.2.3 La formule de Papay issue des états correspondants

Finalement, une dernière méthode de calcul du facteur de compressibilité est donnée dans [4]. Elles est implémentée par défaut sous Simone et qualifiée de Papay.

Elle utilise la loi des état correspondant qui établit une équation d'état du gaz sous forme réduite. L'équation ne dépend alors plus de la composition du gaz :

$$f(P_r, V_r, T_r) = 0$$
 avec  $P_r = \frac{P}{P_{critique}}, V_r = \frac{V}{V_{critique}}, T_r = \frac{T}{T_{critique}}$ 

Elle donne une erreur moyenne de 4.889% pour les domaines de température et de pression très large :  $1.1 < T_r < 3,0$  et  $0.2 < P_r < 15,0$  soit pour le gaz naturel -60 < T < 300 °C et 10 bara < P < 700 bara. La formule s'écrit :

$$Z = 1 - \frac{3.52P_r}{10^{0.9813T_r}} + \frac{0.274P_r^2}{10^{0.8157T_r}}$$

## 10.3 Calcul précis de la densité normalisé

La masse volumique normalisée  $\rho_N$  apparaît très souvent dans les coefficients du modèle. Son calcul effectif s'effectue à partir de l'équation d'état du gaz. On reprend l'expression de  $\delta$  et on voit que c'est une fonction linéaire de  $d_N$ :

$$\delta = \frac{10^{-5}}{1050} \left( \frac{PCS_N}{3.6 \ 10^7} + d_N - 1 \right) \left( 3.6 - \frac{4(T - 273.15)}{100} \right).$$

L'équation d'état nous fournit alors une équation du second degré en  $d_N$  que l'on peut résoudre :

$$\frac{-P_a}{1.05\ 10^8} \left(3.6 - 4\frac{T_0 - 273.15}{100}\right) \ d_N^2 \ + \ \left[1 - \frac{Pa}{1.05\ 10^8} \left(\frac{PCS_N}{3.6\ 10^7} - 1\right) \left(3.6 - 4\frac{T_0 - 273.15}{100}\right)\right] \ d_N \ - \ \frac{MZ_{Nair}}{M_{air}} = 0$$

L'erreur sur la valeur trouvé pour  $d_N$  est fortement dépendante de la formule choisie pour le facteur de compressibilité.

## 10.4 Calcul précis du coefficient de frottement

#### 10.4.1 Formule de Nikuradze

Concernant le calcul de  $\lambda$ , plusieurs formulations empiriques existent. Le problème est qu'elles se présentent sous forme implicite. Dans [1], on nous explique que le premier à avoir étudié la relation entre le coefficient de frottement, la rugosité et le nombre de Reynnolds est Nikuradze. En 1933, il obtint une formulation implicite de  $\lambda$ , accessible sous Simone, pour tout le pannel de nombres de Reynolds possibles :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0.86 \log\left(R_e \sqrt{\lambda}\right) - 0.8.$$

#### 10.4.2 Formule de Colebrook

En 1938, Colebrook et White établirent une équation célèbre qui prit leur nom et permet de calculer le coefficient de frottement avec une excellente précision pour des canalisations régulières et adhérentes à nombres de Reynolds supérieur à 3000. Elle est très utilisée dans l'industrie gazière :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0.86 \log \left( \frac{K_e}{3.7D} + \frac{2.51}{R_e \sqrt{\lambda}} \right)$$

Sous Simone, une approximation de la formule de Colebrook est utilisée dans la simulation des équations d'évolution. Elle est qualifiée de Hofer et est implémentée par défaut. Par ailleurs, un industriel de Gaz de France établit en 1981 une formulation explicite très précise pour les écoulements en conduite industriel en acier que nous utiliserons dans notre modélisation :

$$\lambda = \frac{25}{\log_{10}^2 \left[ \left( \frac{K_e}{3.7D} \right)^{10} + \left( \frac{5.03 \log_{10} R_e - 4.32}{R_e} \right)^{9.6} \right]}$$

## 10.4.3 La méthode PTM

Dans le cas où le fluide est en régime laminaire, d'autres modèles permettent de modéliser les écoulements. Cependant, si le nombre de Reynolds se met à augmenter durant l'expérience, le fluide va passer d'un régime transitoire à un régime turbulent.

Or, la prédiction du temps d'arrivée de ce régime transitoire et de sa durée par les modèles précédents sont souvent inférieures à la réalité. C'est pourquoi Schmidt et Patankar ont développé des modifications sur les équations d'évolution. Ils ont ajoutées un terme correctif d'où le nom de Production Term Modification method (PTM) présentée dans [6]. Ce type d'équation est également disponible sous Simone.

## 10.4.4 Calcul effectif du coefficient de frottement

Afin de calculer le coefficient de frottement il est nécessaire de calculer le nombre de Reynolds :

$$R_e = \frac{\rho u D}{\nu} = \frac{4\rho_N Q_N}{\pi D\nu}$$

qui lui-même dépend du coefficient de viscosité dynamique dont la formule empirique suivante est très utilisée dans l'industrie gazière :

$$\nu = 10^7 \left( 45.7 d_N - \frac{5.4 P C S_N}{3600 \ 10^3} + 0.34 (T - 273.15) + 136.2 \right).$$

En toute rigueur, le coefficient de frottement dépend du débit et donc du temps et de l'espace. Cependant, comme on peut le voir sur le graphique ci-dessous, le coefficient de frottement devient indépendant du débit lorsque celui se trouve être dans les ordres de grandeur de notre étude. On prendra donc  $Q_N = Q_{Ne}$  pour le calcul du nombre de Reynolds.



Indépendance du facteur de compressibilité vis à vis du débit pour un nombre de Reynolds élevé

# Chapitre 11 Etude de l'état initial

En régime permanent, on va montrer qu'il est possible de calculer exactement la solution. On pourra alors la comparer à la formule obtenue par la modélisation et à ce que donne Simone. On remarquera une erreur relative inférieure à 0.1% mais qu'un calibrage des paramètres est nécessaire par rapport à Simone.

## 11.1 Résolution des équations de Navier Stokes en régime permanent

On a supposé que l'état initial était indépendant du temps et que la CCCG était fermée. L'équation de conservation de la masse s'écrit donc :

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{=0} + \frac{\rho_N}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\rho_N}{S} \underbrace{Q_{Ncccg}}_{=0} \delta_{x_{cccg}}(x)$$

Ainsi, on obtient un débit initial constant et pris égal à  $Q_{Ne}$ . Grâce à l'équation d'état du gaz réel  $PM = \rho ZRT$ , on peut alors exprimer la vitesse en fonction de la pression initiale :

$$u = \frac{\rho u}{\rho} = \frac{\rho_N Q_{Ne}}{S} \frac{RT}{M} \frac{1 - \delta P_0}{P_0}$$

On reporte cette expression dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Il vient en notant  $A = \frac{\rho_N^2 Q_{Ne}^2 RT}{S^2 M}$ :

$$A\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Z_0}{P_0}\right) + \frac{\partial P_0}{\partial x} + \frac{\lambda A}{2D}\frac{Z_0}{P_0} = 0.$$

On peut alors tenter d'obtenir une formulation implicite de la pression initiale en mettant l'équation sous forme conservative. Après réorganisation des termes, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( 1 - \frac{1}{\delta^2 A} \right) \log \left( 1 - \delta P_0 \right) - \log P_0 - \frac{P_0}{\delta A} \right] = \frac{-\lambda}{2D}$$

Cette équation de la pression de la forme  $g(P_0(x)) = g(P_0(0)) - \frac{\lambda}{2D}x$  se résout facilement numériquement avec une méthode par dichotomie, la fonction  $g(P_0)$  étant décroissante strictement car sa dérivée est égale à  $-\frac{\lambda}{2D} < 0$ . Ce sera notre référence pour l'état initial.

## 11.2 Etat initial sans les termes d'inertie

La conservation de la masse implique toujours que le débit est constant. Comme précédemmment, la conservation de la quantité de mouvement mise sous forme conservative permet d'obtenir une équation de la pression sous forme implicite :

$$\frac{2P}{Z}\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{2P}{\delta} - \frac{2}{\delta^2}\log\left(1 - \delta P\right)\right) = -\alpha Q_{Ne}^2$$

On pourrait utiliser la dichotomie comme précédemment mais il se trouve que cette équation implicite peut dans ce cas particulier se résoudre explicitement<sup>1</sup>. Remarquons enfin que si on effectue des développements limités grâce à la condition  $\delta P \ll 1$ , on retombe sur l'équation en  $P_0^2$  déjà utilisée dans l'industrie gazière pour calculer les pertes de charges en régime permanent.

## 11.3 Etat initial de la modélisation

On garde le même résultat pour l'équation de conservation de la masse, à savoir que le débit est constant. Pour l'équation de la conservation de la quantité de mouvement, on néglige les termes d'inertie et on suppose que le facteur de compressibilité ne dépend pas de x. On le remplace donc par la facteur de compressibilité initial moyen  $Z_m(0)$ . Il vient alors :

$$\frac{\partial P_0^2}{\partial x} \approx -\alpha Z_m(0) Q_{Ne}^2 \Longrightarrow P_0(x) = \sqrt{P_e - \alpha Z_m(0) Q_{Ne}^2 x}.$$

En utilisant le coefficient de pertes de charges initiales  $\eta_{ini} = -\alpha Z_m(0)Q_{Ne}^2$ , on obtient la formulation suivante :

$$P_0^2(x) = P_e^2 - \eta_{ini}x.$$

Pour calculer  $Z_m(0)$ , il suffit de supposer que  $P_m(0)$  est en norme quadratique. L'intégration entre 0 et L de l'équation de la pression initiale nous fournit alors une équation du second degré en  $P_m(0)$ , ce qui permet de le calculer :

$$P_m^2(0) = P_e^2 - \frac{\alpha Q_{Ne}^2 L}{2} \left(1 - \delta P_m(0)\right)$$

<sup>1.</sup> Cf Annexes pour la simulation de l'état initial

On rappelle ici la constatation qu'on avait faite lors de l'hypothèse  $\frac{P_m}{Z_m} \approx \left(\frac{P}{Z}\right)_m$ : remplacer la moyenne d'ordre 1 par la moyenne quadratique peut engendrer des erreurs non négligeables.

Bien que le calcul de  $\eta_{ini}$  s'effectue avec  $P_{m2}(0)$ , les autres paramètres du modèle sont issus du bilan de masse qui fait intervenir la pression moyenne initiale en norme 1. Il convient donc de la calculer précisément :

$$P_{m1}(0) = \frac{2}{3LZ_{m2}(0)\alpha Q_{Ne}^2} \left[ Pe^3 - \left( Pe^2 - \alpha Z_{m2}(0)Q_{Ne}^2 L \right) \right]^{\frac{3}{2}}.$$

## 11.4 Comparaison des résultats

L'état initial sera établi sur une canalisation de 400 km et de diamètre D = 0.75 m. La pression à l'entrée sera de  $P_e = 67$  bara et le débit normalisé de  $Q_{Ne} = 450\ 000$  Nm<sup>3</sup>.h<sup>-1</sup>. On va dans un premier temps valider le modèle retenu pour l'état initial puis on comparera les résultats obtenus avec le logiciel Simone.

Paramètres de référence	Notation	Valeur
Pression atmosphérique	$P_a$	1.01325 bara
Température de référence	$T_0$	0 °C
Constante des gaz parfait	R	$8.314472 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$
Masse molaire de l'air	$M_{air}$	$28.963 \text{ g.mol}^{-1}$
Facteur de compressibilité normalisé de l'air	$Z_{Nair}$	0.99941

Paramètres constants	Notation	Valeur
Rugosité apparente de la conduite	ke	$20 \ \mu \mathrm{m}$
Masse molaire du gaz	M	$16.043 \text{ g.mol}^{-1}$
Pouvoir calorifique supérieur normalisé du gaz	$PCS_N$	11.4 kWh.Nm <sup>3</sup>
Température intérieure de la canalisation	T	20 °C

Paramètres initiaux	Notation	Valeur
Diamètre intérieur de la conduite	D	0.75 m
Longueur de canalisation	L	400 km
Pression initiale à l'entrée de la canalisation	$P_e$	67 bara
Débit normalisé initial	$Q_{Ne}$	$450\ 000\ \mathrm{Nm^3.h^{-1}}$

## 11.4.1 Entre l'état initial et le modèle

Le tableau ci-après présente les erreurs relatives des approximations successivement faites dans la modélisation par rapport au calcul exact de l'état initial. On peut voir que l'erreur commise en négligeant les termes d'inertie est quasi-nulle ce qui conforte l'hypothèse faite.

De même, supposer que le facteur de compressibilité ne dépend pas de la variable spatiale semble une hypothèse raisonnable. Elle introduit une erreur inférieure à 0.2%. Par contre, la tentation de vouloir considérer un gaz parfait (Z = 1) introduit des erreurs non négligeables de l'ordre de 10%.



#### 11.4.2 Entre la modélisation et Simone

Le graphique ci-dessous représente le profil spatial de la pression initiale entre le modèle et Simone pour différentes formules du facteur de compressibilité et d'équations d'évolution choisies. On peut remarquer que la formule prise en compte pour le facteur de compressibilité influe peu sur l'orientation de la courbe.

Au contraire, le choix des équations d'évolution et en particulier de la formule pour le coefficient de frottement va fortement impacter la solution. Cela permet de relativiser quant à l'utilisation de Simone pour la validation de la modélisation. De plus, les écarts entre les courbes sont du même ordre de grandeur que celui observé pour notre modélisation, ce qui est rassurant.



Ainsi, afin de pouvoir comparer les futurs résultats avec Simone, l'état initial du modèle sera calibré sur Simone avec les paramètres par défaut (Hofer/Papay). Dans cet exemple, le facteur 1.084 sera multiplié au coefficient  $\alpha$  et minimise l'erreur commise avec entre le modèle et Simone (< 0.1%). Vérifié sur une dizaine de cas qui seront décrit dans le chapitre suivant, il semble que l'erreur reste stable et ne dépend plus la configuration une fois le paramètre calibré.

# Chapitre 12

## Etude du régime dynamique

On étudie dans ce chapitre la validité du modèle non plus sur l'état initial, mais sur toute la durée d'une expérience. On comparera également les résultats de Simone pour différentes formules du facteur de compressibilité et pour différentes équations d'évolution choisies.

## 12.1 Validité du modèle sur le profil temporel

Comme on peut le voir sur la figure ci-dessous, il apparaît que le modèle, avec un état initial calibré sur les paramètres par défaut de Simone, semble capter avec une bonne précision l'ensemble des phénomènes dues à la CCCG.

De plus, les courbes sont confondues au départ puis parallèles ensuite car elles sont issues d'état initiaux différents. On peut donc affirmer que l'influence du choix de la formule pour le facteur de compressibilité est négligeable du moment qu'il est pris en compte. De même, le choix des équations d'évolution ne semble pas influencer réellement l'évolution horaire de la pression. Ceci nous rassure vis-à-vis de l'utilisation de Simone comme logiciel de référence.



## 12.2 Description des expériences effectuées pour valider le modèle

Neuf expériences ont été réalisées afin de valider le modèle. Sur chaque profil de pression apparaîtra trois types de courbes : celle de Simone, celle du modèle (la série de Fourier ira jusqu'à  $n = 10\ 000$ ) et celle d'un modèle simplifié dont l'expression simple sera présentée dans la partie suivante et permettra une interprétation physique de la solution tout en gardant une bonne précision.

On choisira exprès des cas assez contraignants. Bien qu'ils ne correspondent pas à la réalité, ils permettront de s'assurer de la robustesse du modèle. Les différentes données pour chaque cas sont détaillées dans les annexes et sont rappelées au dessus de chaque graphique également disponible dans les annexes. La première série d'expériences utilisent la configuration du cas fictif en changeant la pression d'entrée et le débit de la CCCG.

- 1. Pe = 67 bara et  $Q_{Ncccg} = 160\ 000\ \text{Nm}^3.\text{h}^{-1}$
- 2. Pe = 67 bara et  $Q_{Ncccg} = 80\ 000\ \text{Nm}^3.\text{h}^{-1}$
- 3. Pe = 80 bara et  $Q_{Ncccg} = 160\ 000\ \mathrm{Nm}^3.\mathrm{h}^{-1}$
- 4.  $P_e = 80$  bara et  $Q_{Ncccq} = 80\ 000\ \text{Nm}^3.\text{h}^{-1}$

La deuxième série d'expériences passe à une configuration sur dimensionnée (D = 1 m, L = 230 km,  $x_{cccg} = 110$  km) qui gar de le même volume de canalisation que le cas fictif.

Pe = 67 bara et  $Q_{Ncccg} = 160\ 000\ \text{Nm}^3.\text{h}^{-1}$ Pe = 67 bara et  $Q_{Ncccg} = 80\ 000\ \text{Nm}^3.\text{h}^{-1}$ Pe = 80 bara et  $Q_{Ncccg} = 160\ 000\ \text{Nm}^3.\text{h}^{-1}$  $P_e = 80\ \text{bara et } Q_{Ncccg} = 80\ 000\ \text{Nm}^3.\text{h}^{-1}$ 

Le neuvième cas est très contraint et avec des données totalement différentes des autres expériences.

- D = 0.5 m
- L = 100 km
- $x_{cccg} = 50 \text{ km}$
- $Q_{Ne} = 300 \ 000 \ \mathrm{Nm}^3.\mathrm{h}^{-1}$
- $P_e = 70$  bara
- $Q_{Ncccg} = 80\ 000$


### 12.3 Comparaison des résultats

Les quatre graphiques suivant pris sur le cas fictif sont représentatifs de l'ensemble des phénomènes observés sur les graphiques disponibles en annexe.

De manière globale, si la pression est élevée ( $P_e \sim 80$  bara), la précision du modèle est très bonne (erreur < 2%), même pour des durées et des distances bien supérieures à la réalité ( $t_{max} \sim 22$  h,  $L \sim 400$  km). Au contraire, lorsque la pression descend en dessous des pressions admissibles ( $P_{min} \sim 30$  bara), le modèle atteint ses limites et devient plus pessimiste que Simone (erreur > 10%).

Cependant, même pour des pressions d'entrée plus faibles ( $P_e \sim 67$  bara), la validité du modèle reste bonne (erreur < 2%) sur des distances élevées ( $L \sim 400$  km) pour une durée inférieure à 15 h, bien supérieures au temps de fonctionnement moyen d'une CCCG (8 h).

Par ailleurs, le modèle semble être plus optimiste que Simone pour des durées et des distances élevées ( $t_{max} \sim 22$  h,  $L \sim 400$  km). Cependant, l'erreur reste dans tout les cas très faible (< 2%).

Enfin, le modèle simplifié se comporte comme le modèle vis-à-vis de Simone. Cependant, même si localement sa précision peut être meilleure que celle du modèle, on observe globalement une erreur relative plus importante que celle du modèle (< 3%).

Dans le cadre de notre étude, la pression ne pourra descendre en dessous d'une pression minimale  $P_{min}(x)$  imposée par GRTgaz qui doit assurer l'acheminement du gaz aux expéditeurs. Ainsi, même pour des configurations très contraintes, la précision du modèle et de sa version simplifiée resteront très bonne (erreur < 2%). De plus, on est ici dans une configuration de sécurité où si l'on descend en dessous des pressions admissibles, le modèle est plus pessimiste que Simone. Ceci confirme la robustesse du modèle et valide sa pertinence face aux phénomènes étudiés.

#### Profil de pression en temps



Erreur relative en temps commise sur la pression entre le modèle et Simone



#### Profil de pression en espace



Erreur relative en espace commise sur la pression entre le modèle et Simone



# Cinquième partie

Exploitation du modèle en vue d'applications pratiques

# Chapitre 13

# Résumé des étapes importantes de la modélisation

On résume ici les principales idées contenues dans la troisième partie.

# 13.1 Etablissement d'un système d'équation d'évolution dynamique

#### Hypothèses usuellement faites dans l'industrie gazière

- Ecoulement mono-dimensionnel et horizontal
- Ecoulement isotherme
- Ecoulement où les forces d'inertie sont négligeables

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{P}{Z} \right) + \beta \frac{\partial Q_N}{\partial x} = -\beta Q_{Ncccg} \delta_{cccg}(x) \\ \frac{2P}{Z} \frac{\partial P}{\partial x} = -\alpha Q_N |Q_N| \end{cases}$$

Paramètre de l'équation	Notation	Expression	Ordre de grandeur
Paramètre d'espace	α	$\frac{\lambda \rho_N^2}{DS^2} \frac{RT}{M}$	$10^{-11}$ bara <sup>2</sup> .km <sup>-1</sup> .Nm <sup>-6</sup> .h <sup>2</sup>
Paramètre de temps	β	$\frac{RT}{M}\frac{\rho_N}{S}$	$10^{-3}$ bara.km.Nm <sup>-3</sup>

# 13.2 Etablissement d'une équation de la chaleur

#### Hypothèses propres à la modélisation

- Ecoulement unidirectionnel sur une portion de canalisation
- Etat initial établi en régime permanent
- Facteur de compressibilité ne dépendant quasiment pas de la variable spatiale

$$\frac{\partial \left(P^{2}\right)}{\partial t} - \gamma(t) \frac{\partial \left(P^{2}\right)}{\partial x} = -\gamma(t) \eta_{espace_{cccg}} \delta_{cccg}(x).$$

Paramètre de l'équation	Notation	Expression	Ordre de grandeur
Pertes de charges spatiales	$\eta_{espace_{cccg}}$	$2Z_{m1}(0)\alpha Q_{Ne}Q_{Ncccg}$	$7.3 \text{ bara}^2 \text{.km}^{-1}$
Coefficient de diffusivité	$\gamma(t)$	$\frac{Z_m(0)\beta}{\alpha Q_{Ne}} \frac{P_m(0) - \frac{Z_m(0)\beta Q_{Ncccg}}{L}t}{\left(1 + \delta \frac{Z_m(0)\beta Q_{Ncccg}}{L}t\right)^2}$	
Pertes de charges temporelles	$\eta_{temps_{cccg}}$	$\frac{Z_{m1}^2(0)\beta Q_{Ncccg}}{L}$	$2.2 \text{ bara.h}^{-1}$
Diffusivité approchée	$\gamma(t)$	$\frac{2L}{\eta_{espace_{cccg}}} \left( P_{m1}(0)\eta_{temps_{cccg}} - \eta_{temps_{cccg}}^2 t \right)$	$\gamma(0) \sim 7255 \ {\rm km}^2.{\rm h}^{-1}$

# 13.3 Une solution explicite sous forme de trois termes

$$P^{2}(x,t) = \underbrace{P^{2}_{e}(x) - \eta_{inix}}_{P_{0}(x)} \underbrace{-\eta_{espace_{cccg}} \frac{\int_{0}^{t} \gamma(s) ds}{L}}_{B_{masse}(t)} \underbrace{-\frac{2\eta_{espace_{cccg}}}{L} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{L}{n\pi}\right)^{2} \cos\left(\frac{n\pi x_{cccg}}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left(1 - e^{-\frac{n^{2}\pi^{2} \int_{0}^{t} \gamma(s) ds}{L^{2}}}\right)}_{S_{fourier}(x,t)}$$

### 13.3.1 Etude de l'état initial

Grandeur	Notation	Expression	Valeur
Pression moyenne initiale à l'entrée	$P_e$	P(0,0)	67 bara
Pression moyenne initiale	$P_{m2}(0)$	$P_{m2}^2(0) = P_e^2 - \alpha \left(1 - \delta P_{m2}(0)\right) Q_{Ne}^2 \frac{L}{2}$	61.65 bara
Pertes de charges initiales	$\eta_{ini}$	$\alpha Z_{m2}(0)Q_{Ne}^2$	$6.9 \text{ bara}^2.\text{km}^{-1}$
Pression initiale	$P_0(x)$	$\sqrt{P_e^2 - \eta_{ini}x}$	

### 13.3.2 Etude du terme issu du bilan de masse

Grandeur	Notation	Expression	Ordre de grandeur
Pression moyenne initiale	$P_{m1}(0)$	$\frac{2}{3LZ_{m2}(0)\alpha Q_{Ne}^2} \left[ Pe^3 - \left( Pe^2 - \alpha Z_{m2}(0)Q_{Ne}^2L \right) \right]^{\frac{3}{2}}$	61.56 bara
Pertes de charges spatiales	$\eta_{espace_{cccg}}$	$2Z_{m1}(0) \alpha Q_{Ne} Q_{Ncccg}$	$7.3 \text{ bara}^2.\text{km}^1$
Pertes de charges temporelles	$\eta_{temps_{cccg}}$	$\frac{Z_{m1}^2(0)\beta Q_{Ncccg}}{L}$	$2.2 \text{ bara.h}^{-1}$
Bilan de masse	$B_{masse}(t)$	$\frac{2Z_{m1}(0)}{\delta^2} \left[ Z_{m1}(0) - \frac{Z_{m1}(0)}{1 - \delta \frac{\eta_{tempscccg}}{Z_{m1}(0)} t} - \log\left(1 - \frac{1}{1 - \delta \frac{\eta_{tempscccg}}{Z_{m1}(0)}} t\right) \right] = \frac{1}{\delta^2} \left[ \frac{1}{\delta^2} - \frac{1}{\delta^2} \frac{1}{\delta^2} + \frac{1}{\delta^2} \frac{1}{\delta^2} \frac{1}{\delta^2} + \frac{1}{\delta^2} \frac{1}{\delta^2} + \frac{1}{\delta^2} \frac{1}{\delta^2} \frac{1}{\delta^2} \frac{1}{\delta^2} + \frac{1}{\delta^2} \frac{1}{\delta^2} \frac{1}{\delta^2} + \frac{1}{\delta^2} 1$	$\left[ -\delta \frac{\eta_{temps_{cccg}}}{Z_{m1}(0)} t \right]$
Bilan de masse approché	$B_{masse}(t)$	$-2P_{m1}(0)\eta_{temps_{cccg}}t + \eta_{temps_{cccg}}^2t^2$	

## 13.3.3 Etude de la série de Fourier

Grandeur	Notation	Expression
Régime initiale	$S_{fourier}(x,0)$	0
Terme permanent	$f(x) = S_{fourier}(x, +\infty)$	$-\eta_{espace_{cccg}} \left[ \frac{x^2 + x_{cccg}^2}{2L} + \frac{L}{3} - \begin{cases} x_{cccg} & \text{si } x \leqslant x_{cccg} \\ x & \text{sinon} \end{cases} \right]$
Terme transitoire	$S_{fourier}(x,t) - f(x)$	$ S_{fourier}(x,t) - f(x)  \leq  f(x) e^{-\frac{t}{\tau_{cccg}}}$
Constante de temps	Tcccg	$\frac{L^2}{\pi^2 \gamma(0)} = \frac{L\eta_{espace_{cccg}}}{2\pi^2 P_m(0)\eta_{temps_{cccg}}} \sim 33 \text{ min}$

# Chapitre 14

# Interprétation physique de la solution sous forme d'un modèle simplifié

La solution à l'équation de la chaleur s'exprime sous forme de trois termes, chacun possédant un rôle précis dans l'interprétation des phénomènes :

- La pression initiale  $P_0(x)$  en régime permanent;
- La série de Fourier  $S_{fourier}(x,t)$  passant d'un état initial nul à un régime transitoire complexe pour tendre vers un régime asymptotique f(x) indépendant du temps;
- Le terme issu du bilan de masse  $B_{masse}(t)$  correspondant à la vidange de la canalisation par la CCCG.

Chacun de ses termes sera caractérisé par un coefficient de pertes de charges. Par rapport au régime permanent, deux nouveaux types de pertes de charges, qualifiées de dynamiques, vont apparaître. Avec la durée du régime transitoire, quatre paramètres vont donc capter l'ensemble des phénomènes. On va les reprendre un par un et s'attacher dans ce chapitre à expliciter leur signification physique. Il en ressortira un modèle simplifié dont la validité a déjà été établie dans la partie précédente.

Ne cherchant pas ici à valider un modèle mais à le comprendre, le cas fictif utilisé dans cette partie pour la simulation partira de données beaucoup plus réalistes. Les données utilisées seront proches de celles de l'artère de Seine sauf que la CCCG sera mise au milieu afin d'observer l'impact de la centrale en amont et en aval de la canalisation.

Paramètres de référence	Notation	Valeur
Pression atmosphérique	$P_a$	1.01325 bara
Température de référence	$T_0$	0 °C
Constante des gaz parfait	R	$8.314472 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$
Masse molaire de l'air	$M_{air}$	$28.963 \text{ g.mol}^{-1}$
Facteur de compressibilité normalisé de l'air	$Z_{Nair}$	0.99941
Paramètres constants d'une expérience à l'autre	Notation	Valeur
Rugosité apparente de la conduite	ke	$10 \ \mu m$
Masse molaire du gaz	M	$17  \text{g.mol}^{-1}$
Pouvoir calorifique supérieur normalisé du gaz	$PCS_N$	$11.4 \text{ kWh.Nm}^3$
Température intérieure de la canalisation	T	12 °C
Paramètres variant d'une expérience à l'autre	Notation	Valeur
Diamètre intérieur de la conduite	D	0.75 m
Longueur de canalisation	L	200 km
Pression initiale à l'entrée de la canalisation	$P_e$	67 bara
Débit normalisé initial, entrant et sortant	$Q_{Ne}$	$450\ 000\ \mathrm{Nm^3.h^{-1}}$
Débit normalisé de la CCCG	$Q_{Ncccg}$	$240\ 000\ \mathrm{Nm^3.h^{-1}}$
Emplacement de la CCCG	$x_{cccg}$	100 km

### 14.1 Pertes de charges initiales propre à l'écoulement

On va étudier le phhénomène des pertes de charges initiales dues à l'écoulement du gaz en conduite. Ce phénomène est déjà bien connu puisqu'il est présent dans une étude du réseau effectuée en régime permanent. On va principalement retrouver des résultats connus.

#### 14.1.1 Rappel de son expression

On rappelle l'expression obtenue pour l'état initial :

$$P_0^2(x) = P_e^2 - \eta_{ini}x.$$

Il apparait ici le coefficient de pertes de charges initiales :

$$\eta_{ini} = Z_m(0) \alpha Q_{Ne}^2 \approx \frac{Z_m(0) Q_{Ne}^2}{10^{11} D^5} \sim 7 \text{ bara}^2 \text{.km}^{-1}.$$

L'influence des paramètres sur les pertes de charges en régime permanent est déjà bien connue de l'industrie gazière. Le carré de la pression est une fonction affine de x avec un coefficient de pertes de charges proportionnel à  $Q_{Ne}^2$  et inversement proportionnel à  $D^5$ . Ce coefficient donne une perte en bara<sup>2</sup>.h<sup>-1</sup> ce qui n'a guère de signification physique.

#### 14.1.2 Ordre de grandeur de la perte de charges spatiale initiale

Pour obtenir les pertes de charges initiales spatiales, on linéarise la racine de la pression initiale. On a donc :

$$P^0(x) \approx P_e - \frac{\eta_{ini}}{2P_e}x.$$

Le coefficient de la droite  $\frac{\eta_{ini}}{2P_e} \sim 0.05$  bara.km<sup>-1</sup> donne un ordre de grandeur de la perte de pression initiale spatiale. Dans le cas utilisé, il s'agit d'une perte de  $\Delta P \sim 10$  bara sur 200 km.

C'est ce qu'on oberve sur le graphique suivant. Il y est représenté le profil exact de la pression initiale spatiale en régime permanent, celui du modèle et celui issu de la linéarisation. On voit que la pente de cette dernière caractérise bien les pertes de charges spatiales de l'état initial (erreur < 2%).

#### Profil spatial de la pression initiale



Erreur relative en espace commise sur la pression initiale et celle du modèle

Qcccg = 0 Nm<sup>3</sup>/h Qe = 450000 Nm<sup>3</sup>/h Pe = 67 bara L = 200 km xcccg = 100 km D = 0.75 m M = 17 g/mol PCS = 11.4 kW/h/Nm<sup>3</sup> T = 12 °C ke = 10  $\mu$ m



# 14.2 Pertes de charges spatiales dues à la propagation du phénomène de la CCCG

#### 14.2.1 Rappel de son expression

La série de Fourier  $S_{fourier}(x,t)$  dont l'expression est rappelée ci-dessous n'est autre que la diffusion du phénomène de la CCCG dans la conduite :

$$S_{fourier}(x,t) = -\eta_{espace_{cccg}} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \cos\left(\frac{n\pi x_{cccg}}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \left(1 - e^{-\frac{n^2\pi^2 \int_0^t \gamma(s).ds}{L^2}}\right) \right].$$

En effet, le phénomène de la propagation est un régime complexe qui se divise en trois étapes :

- A l'instant initial, la CCCG ne fonctionne pas et le phénomène n'existe pas. Le terme de diffusion sous forme de série de Fourier est donc nul lorsque t = 0.
- Après l'instant initial, la CCCG démarre, et  $S_{fourier}(x, t)$  devient non nulle. Son expression est alors explicite mais compliquée. Elle exprime simplement la propagation locale du phénomène de la CCCG en espace au cours du temps.
- A l'infini, lorsque  $t \longrightarrow +\infty$ , on remarque que que l'exponentielle dans la somme tend vers 0.  $S_{fourier}(x,t)$  tend vers la fonction limite f qui ne dépend plus que de x. Physiquement, le phénomène est alors propagé et établi. Ce régime indépendant du temps caractérise l'impact global de la CCCG en espace.

#### 14.2.2 Etude du régime transitoire

Voici sur le graphique ci-dessous la visualisation du régime transitoire de  $S_{fourier}(x, t)$  pour le cas fictif  $(x_{cccg} = \frac{L}{2})$  à la sortie (x = L). On peut voir que le terme part de zéro pour aller vers un régime indépendant du temps.



#### Rappel sur la signification d'une constante de temps

Rappelons brièvement en quoi la constante  $\tau_{cccg}$  est si importante à la compréhension de la durée du régime transitoire. C'est principalement parcequ'elle donne une échelle de temps de référence. Prenons un exemple plus simple. Soit la fonction w définit par :

$$w(t) = a - ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

où a est une constante qui désigne ici le régime sympotique vers lequel w tend.

Dérivons la fonction soit  $w'(t) = \frac{a}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$  et à l'instant initial, on obtient la pente de la tangente à la courbe en t = 0 soit  $\frac{a}{\tau}$ . L'équation de cette tangente s'écrit donc  $y(t) = \frac{at}{\tau}$ . En particulier, en  $t = \tau$ , on obtient  $y(\tau) = a$ .

Cela signifie que si la courbe est remplacée par sa tangente à l'instant initial, le régime permanent est atteint au bout d'un temps  $\tau$ . On a ainsi obtenu une durée qui nous dit quand atteindre le régime permanent en approximant la courbe par une droite (linéarisation). Voici la visualisation graphique de tout ceci.



Si l'approximation précédente ne semble pas satisfaisante comme on pourrait le penser sur le graphique, la constante  $\tau$  nous fournit une échelle de temps (tous les  $n\tau$ ) pour évaluer l'erreur relative entre a et w par rapport à l'état permanent a sur lequel on aimerait justement se placer le plus vite possible parcequ'il est constant.

$$\left|\frac{w(n\tau)-a}{a}\right| = e^{-n}$$

Usuellement, on prend n = 3. Cela suppose que l'hypothèse  $w(t) \approx a$  pour  $t \ge 3\tau$  est vraie à  $e^{-3} \approx 5\%$  près.

#### Etude de la constante de temps

Il convient maintenant de caractériser la durée du régime transitoire pour savoir si, en fonction de l'étude effectuée, on peut ou non le négliger dans le modèle. Par l'étude de la série de Fourier, on a obtenu une constante de temps dont on rappelle l'expression :

$$\tau_{cccg} = \frac{L^2}{\pi^2 \gamma(0)} = \frac{\alpha Q_{Ne} L^2}{\pi^2 \beta P_m(0) Z_m(0)} \approx \frac{L^2 Q_{Ne}}{10^8 \ \pi^2 Z_m(0) P_m(0) D^3} \sim 33 \quad \text{min}$$

Cette constante est proportionnelle à  $Q_{Ne}$  et à  $L^2$  ainsi qu'inversement proportionnelle à  $D^3$ . De plus, si on fait apparaître la vitesse dans l'expression de  $\tau_{cccg}$ , on peut retrouver l'ordre de grandeur donné dans [18], à savoir que la dynamique d'une canalisation peut se synthétiser dans une constante de temps  $\tau_{cana}$  proportionnelle à  $\frac{L^2U}{D} \propto \frac{L^2Q_N}{D^3}$ .

Comme on va le voir, la constante de temps n'est pourtant pas forcément associée à la durée du régime transitoire. Elle est cependant une borne supérieure pour celui-ci en vertu de l'inégalité :

$$|S_{fourier}(x,t) - f(x)| \leq |f(x)| e^{-\frac{t}{\tau_{cccg}}}.$$

Ainsi, on maîtrise la durée du régime transitoire et on peut décider s'il faut le négliger ou non en fonction de ce que l'on veut faire. Si on cherche à observer des phénomènes dans des temps inférieurs à  $3\tau_{cccg}$ , alors on doit prendre en compte le régime transitoire. Au contraire, si l'on observe une évolution sur des durées plus longues, alors on peut négliger ce terme et c'est que l'on fera dans le modèle simplifié. Cela revient à dire que la diffusion est instantanée. Avant le démarrage de la CCCG, le terme est nul, et dès qu'elle démarre, le terme est en régime établi.

Graphiquement, négliger le régime transitoire va entraîner un saut initial de la courbe qui va se réduire à zéro après une durée au moins supérieure à  $3\tau_{cccg}$ . On voit sur les graphiques suivants l'erreur que l'on commet sur le modèle en prenant en compte ou non le régime transitoire ( erreur < 1%).

Les données sont celles de l'artère du Midi  $(x_{cccg} = 0)$ . Le profil temporel est pris à l'entrée (x = 0) soit sous la CCCG. La courbe s'écarte brutalement pour revenir près de ce que donne Simone quand le phénomène est propagé.

Cependant, l'erreur est maîtrisée (< 2%) et asymptotiquement, on retombe sur la bonne courbe. Le phénomène décrit ci-dessus est également présent dans le modèle du fait que l'on doit couper la série de Fourier à un certain  $n = 10\ 000$ .

#### Profil du terme de diffusion en temps



Erreur relative en temps commise sur la pression entre le modèle et Simone

Qcccg = 320000 Nm<sup>3</sup>/h Qe = 630000 Nm<sup>3</sup>/h Pe = 82 bara L = 197 km xcccg = 0 km D = 0.793 m



86

#### Durée du régime transitoire

Cependant, comme on peut le constater dans l'expression de  $\tau_{cccg} = \frac{\alpha Q_{Ne}L^2}{\pi^2 \beta P_m(0) Z_m(0)}$ , il semble étrange que ce terme ne dépend en aucune façon de la CCCG, ni par le débit normalisé, ni par la position.

De plus, sur les deux graphiques suivants où l'on se place à l'entrée (x = 0), il semble que la durée du régime transitoire soit respectivement plus faible sur le cas fictif (CCCG au milieu soit  $x_{cccg} = \frac{L}{2}$ ) que sur l'artère du Midi  $(x_{cccg} = 0)$ . Pourtant, les calculs donnent des constantes de temps similaires à une trentaine de minutes pour les deux cas.





En réalité, cette dépendance est cachée dans la série de Fourier elle-même :

$$S_{fourier}(x,t) = -\eta_{espace_{cccg}} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \cos\left(\frac{n\pi x_{cccg}}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \left(1 - e^{-\frac{n^2\pi^2 \int_0^t \gamma(s).ds}{L^2}}\right) \right].$$

Dans le cas de l'artère du Midi  $(x_{cccg} = 0)$ , en se plaçant à l'entrée (x = 0), les deux cosinus valent 1 dans la série de Fourier  $S_{fourier}(x, t)$ . Le terme le plus significatif de la somme est par conséquent le premier (n = 1). Le régime transitoire possède donc bien  $\tau_{cccg}$  comme constante de temps. D'après la discussion précédente, sa durée sera d'environ  $3\tau_{cccg} \sim 1$  h 30 min ce qu'on observe sur le graphique précédent. La courbe du modèle simplifié rejoint celle du modèle en 1 h 30 min.

Au contraire, dans le cas du cas fictif  $(x_{cccg} = \frac{L}{2})$ , en se plaçant toujours à l'entrée (x = 0), le produit des cosinus dans  $S_{fourier}(x, t)$  vaut :

$$1.\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair}\\ \\ (-1)\overline{2} & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

Ainsi, tous les termes impairs de la série sont nuls. On réécrit alors la série de p = 1 à  $p = +\infty$  tel que n = 2p:

$$S_{fourier}(x,t) = -\eta_{espace_{cccg}} \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p \left(\frac{L}{2p\pi}\right)^2 \left(1 - e^{-\frac{4p^2\pi^2 \int_0^t \gamma(s).ds}{L^2}}\right).$$

Il apparaît dans l'exponentielle un  $4p^2$ . Le terme le plus significatif de cette somme est le premier (p = 1) soit le deuxième de la somme originale (n = 2). Par conséquent, la constante de temps réellement associée au régime permanent est plutôt  $\frac{\tau_{cccg}}{4} \sim 8$  min. La durée du régime transitoire vaut donc environ  $\frac{3\tau_{cccg}}{4} \sim 20$  min. C'est effectivement ce qui est observable sur la première courbe des graphiques précédents. La courbe du modèle simplifié rejoint celle du modèle en 20 min.

On peut maintenant tenter d'expliquer physiquement la différence de durées du régime transitoire observée entre le cas fictif et l'artère du Midi. La constante de temps est fortement proportionnelle à la longueur de la canalisation ( $\propto L^2$ ). Ainsi, vu que des conditions de bords sont imposées de chaque côté, on peut raisonnablement penser que le phénomène de diffusion atteint le régime permanent lorsqu'il s'est diffusé sur l'ensemble de la canalisation. Sa durée est donc lié à la distance entre la CCCG et les extrémités (entrée, sortie).

Il y a donc une dépendance globale de la durée du régime transitoire vis à vis de l'emplacement de la CCCG et d'une certaine manière, l'artère du Midi et le cas fictif représente les deux situations extrémales. Lorsque la CCCG est à l'entrée (ou à la sortie) comme dans le cas de l'artère du Midi, la durée du régime transitoire sera dépendante de L, la plus longue distance possible qu'il peut y avoir entre la CCCG et les deux extrémités.

Au contraire, lorsque la CCCG est au milieu comme dans le cas fictif, la durée du régime transitoire ne sera dépendante que de  $\frac{L}{2}$ , la plus petite distance possible entre la CCCG et les deux extrémités. Il en résulte que la durée du régime transitoire sur l'artère du Midi sera plus longue que sur le cas fictif.

Finalement, en remarquant que pour l'artère du Midi,  $\tau_{cccg} = \frac{L^2}{\pi^2 \gamma(0)}$  alors que pour le

cas fictif,  $\frac{\tau_{cccg}}{4} = \left(\frac{L}{2}\right)^2 \frac{1}{\pi^2 \gamma(0)}$ . Il serait tentant de vouloir modifier directement la formule de  $\tau_{cccg}$  pour obtenir une durée du régime transitoire adéquate pour un  $x_{cccg}$  quelconque, sans avoir recours à la série de Fourier. On écrit donc  $x_{cccg}$  comme combinaison linéaire des deux situations extrémales à savoir :

$$x_{cccg} = a_{cccg}L + b_{cccg}\frac{L}{2}.$$

En supposant une certaine linéarité de la durée du régime transitoire vis-à-vis des durées des régimes transitoires associées aux situations extrémales, il serait tentant d'écrire :

$$\tau_{cccg}(x_{cccg}) = a_{cccg}\tau_{cccg_{Midi}} + b_{cccg}\tau_{cccg_{fictif}} = \left(a_{cccg} + \frac{b_{cccg}}{4}\right)\tau_{cccg}$$

#### 14.2.3 Etude du régime permanent

#### Rappel de son expression

On rappelle l'expression de f associée au régime permanent :

$$f(x) = -\eta_{espace_{cccg}} \left[ \frac{x^2 + x_{cccg}^2}{2L} + \frac{L}{3} - \begin{cases} x_{cccg} & \text{si } x \leqslant x_{cccg} \\ x & \text{sinon} \end{cases} \right]$$

C'est un polynôme de degré deux par morceaux continu. On a respectivement tracé cidessous l'allure du profil spatial de f(x) pour le cas fictif  $(x_{cccg} = \frac{L}{2})$  et l'artère du Midi  $(x_{cccg} = 0)$ . Comme on l'avait déjà mis en évidence mathématiquement et observé lors de la validation du modèle, f possède un minimum négatif sous la CCCG entraînant des pertes de charges spatiales supplémentaires (pic sous la CCCG). Au contraire, f possède un maximum positif à l'extrémité la plus éloignée de la CCCG entraînant des gains de charges spatiales, phénomène qui ne se remarque pas à première vue.

#### Profil de diffusion en espace





Qcccg =  $320000 \text{ Nm}^3/\text{h}$  Qe =  $630000 \text{ Nm}^3/\text{h}$  Pe = 82 bara L = 197 km xcccg = 0 km D = 0.793 m





#### Coefficient des pertes de charges spatiales

On rappelle l'expression du coefficient  $\eta_{espace_{ccca}}$  présent dans f(x):

$$\eta_{espace_{cccg}} = 2Z_{m1}(0)\alpha Q_{Ne}Q_{Ncccg} \approx \frac{2Z_{m1}(0)Q_{Ne}Q_{Ncccg}}{10^{11}D^5} \sim 7.3 \text{ bara}^2.\text{km}^{-1}$$

On peut alors remarquer la grande similitude qui existe entre cette formule et celle de  $\eta_{ini}$ . Le débit  $Q_{Ne}^2$  est simplement remplacé par  $2Q_{Ne}Q_{Ncccg}$  qui on le verra durant la généralisation, provient de la linéarisation du débit  $Q_N^2$ .

Ainsi, l'interprétation physique de  $\eta_{espace_{cccg}}$  peut être rapproché de celle de  $\eta_{ini}$ . Il désigne par conséquent le coefficient des pertes de charges spatiales non pas lié à l'écoulement du gaz mais au phénomène de diffusion de la CCCG. Cependant, à la différence des pertes de charges initiales, ces pertes de charges spatiales sont algébriques. Elles peuvent être positives ou négatives en fonction d'où on se situe dans la canalisation.

Ceci est visuellement présenté dans les graphiques ci-dessous. Ils représentent les profils spatiaux du cas fictif  $(x_{cccg} = \frac{L}{2})$  et de l'artère du Midi  $(x_{cccg} = 0)$  en prenant en compte  $S_{cccg}(x,t)$  et en ne le prenant pas en compte. On voit alors apparaître l'influence spatiale de la CCCG sur les pertes de charges. On aperçoit nettement le pic de pertes de charges sous la CCCG mais aussi les gains de charges en amont et en aval de la CCCG.

#### Profil de diffusion en espace



Puis, il est représenté les erreurs relatives commises entre le modèle (diffusion  $S_{fourier}(x,t)$  jusqu'à  $n = 10\ 000$ ) et Simone, le modèle simplifié (diffusion = f(x)) et Simone mais aussi entre l'expression de P sans diffusion et Simone. On peut remarquer qu'entre le cas fictif

#### Profil de diffusion en espace



et l'artère du Midi, l'influence des pertes de charges spatiales peut être très variable (erreur < 2% pour le cas fictif alors que > 5% pour l'artère du Midi).

Ceci s'explique par le fait que sur l'artère du Midi, la CCCG est située à l'entrée, ce qui vient affecter fortement les conditions de bords. En effet, les pertes de charges ne peuvent se répartirent que d'un seul côté sur l'artère du Midi. De plus, le débit d'entrée et de la CCCG (4 tranches) sont plus importants sur l'artère du Midi.



Erreur relative en espace commise sur la pression entre le modèle et Simone



#### Retour sur la durée du régime transitoire

On a déjà évoqué l'impact global qu'avait l'emplacement de la CCCG sur la durée du régime transitoire. La possibilité pour f(x) de changer de signe va également introduire une dépendance de la durée du régime transitoire vis à vis de x. Tout le raisonnement mathématique qui a été fait avec  $x_{cccg}$  peut en effet être réalisé localement avec x du fait de la présence de  $\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$  dans la série de Fourier  $S_{fourier}(x,t)$ . Mais le raisonnement physique pour  $x_{cccg}$  ne peut se transposer pour x.

C'est justement le fait que f(x) puisse changer de signe qui va nous le fournir. Sous la CCCG, f(x) est négatif alors que loin de la CCCG, f(x) est positive. Par continuité de f, il existe donc un endroit où f est nulle, c'est à dire où la CCCG n'influe pas. L'inexistence du phénomène correspondra graphiquement à une durée du régime transitoire nulle. Ceci met en garde sur le fait que la constante de temps donne une échelle de temps relative à la valeur de f(x). Si celle-ci est faible, le régime apparaîtra comme quasi-nul sur le profil.

Enfin, on peut remarquer que  $\int_0^L f(x)dx = 0$ , ce qui signifie que la CCCG ne crée pas réellement de pertes de charges spatiales, elle ne fait que répartir autrement celles-ci. Sur les graphiques, elle incurve la courbe de pression sous la CCCG, ce qui va par conservation de son intégrale la réhausser en amont et en aval de la CCCG.

# 14.3 Pertes de charges temporelles dues à la vidange de la canalisation par la CCCG

#### 14.3.1 Rappel de son expression

On rappelle ici l'expression approchée du terme issu du bilan de masse. C'est cette dernière qui sera utilisée dans le modèle simplifié :

$$B_{masse}(t) = -2P_{m1}(0)\eta_{temps_{cccg}}t + \eta_{temps_{cccg}}^2t^2.$$

L'expression du modèle simplifié prend donc la forme :

$$P^2(x,t) \approx P_0^2(x) + f(x) + B_{masse}(t)$$

A un x fixé,  $B_{masse}(t)$  représente l'orientation de la courbe sur le profil de pression temporel. Ce terme issu du bilan de masse caractérise ainsi l'impact global de la CCCG en temps. On a représenté dans les graphiques ci-dessous le profil temporel de pression pour le cas fictif et les erreurs relatives commises vis-à-vis de Simone.

On peut remarquer que le développement limité de  $B_{masse}(t)$  qui a été effectué dans le modèle simplifié permet de garder une excellente précision (erreur < 2%). Cependant, par rapport au modèle, l'erreur a tendance à augmenter fortement au fil du temps. Les limites de validité de l'expression simplifié sont toutefois bien supérieures aux durées de fonctionnement d'une CCCG (8 h).



### Erreur relative en temps commise sur la pression entre le modèle et Simone $Qcccg = 240000 \text{ Nm}^3/\text{h}$ $Qe = 450000 \text{ Nm}^3/\text{h}$ Pe = 67 bara L = 200 km xcccg = 100 km D = 0.75 mM = 17 g/mol $PCS = 11.4 \text{ kW/h/Nm}^3$ $T = 12 ^{\circ}\text{C}$ ke = 10 µm Nsérie = 10000



Le modèle simplifié introduit donc des erreurs plus importantes à long terme mais celles-ci restent maîtrisées. Sa formulation très simple sous forme d'un polynôme de degré deux en t va permettre une interprétation de  $\eta_{temps_{cecg}}$ .

### 14.3.2 Coefficient de pertes de charges temporelles

L'expression de  $B_{masse}(t)$  fait apparaître un coefficient  $\eta_{temps_{cccq}}$ :

$$\eta_{temps_{cccg}} = \frac{Z_{m1}(0)^2 \beta Q_{Ncccg}}{L} \approx \frac{Z_{m1}(0)^2 Q_{Ncccg}}{10^3 L D^2} \sim 2.2 \text{ bara.h}^{-1}.$$

Ce coefficient, comme celui des pertes de charges spatiales, est proportionnel au débit de la CCCG  $Q_{Ncccg}$  mais inversement proportionnel au volume  $LD^2$  de la portion de canalisation considérée.

Ce coefficient s'exprime en bars absolus par heure. Il est donc tentant de le définir comme le coefficient des pertes de charges temporelles.

#### Coefficient de pertes de charges temporelles

Reprenons l'expression du modèle simplifié en faisant apparaître un carré :

$$P^{2}(x,t) = P_{0}^{2}(x) + f(x) + \left[\eta_{temps_{cccg}}t - P_{m1}(0)\right]^{2} - P_{m1}^{2}(0)$$

En passant à la racine pour retrouver P, on peut faire apparaître les asymptotes de la pression :

$$P(x,t) = \eta_{temps_{cccg}} | t - \frac{P_{m1}(0)}{\eta_{temps_{cccg}}} | \sqrt{1 + \frac{P_0^2(0) - P_{m1}^2(0) + f(x)}{\left[\eta_{temps_{cccg}}t - P_{m1}(0)\right]^2}}$$

Il se trouve que c'est une droite de coefficient directeur  $\eta_{temps_{cccg}}$ . On retrouve une propriété qui avait été mise en évidence dans [16], à savoir qu'après un régime transitoire, la perte de pression horaire semblait constante.

Voici la visualisation graphique de ceci sur le cas fictif. On a représenté le profil de pression temporel du modèle simplifié sur un domaine temporel très important. On aperçoit la présence de l'asympte et comment elle intervient sur le domaine qui nous intéresse [0, 24 h].



Finalement, le coefficient  $\eta_{temps_{cccg}}$  caractérise bien les pertes de charges temporelles de la CCCG. Toutefois, contrairement à ce qui avait été observé dans [16]. Le modèle simplifié assure que la perte de pression horaire est bien proportionnelle au débit de la CCCG  $Q_{Ncccg}$ .

L'écart obervée entre le modèle simplifié et Simone provient essentiellement du fait que l'expression de la parabole n'est valable que jusqu'à un certain temps. Plus de précision nécessiterai de considérer l'expression compliquée de  $B_{masse}(t)$ , difficile à manipuler et à interpréter. Toutefois, cette erreur reste maîtrisée et inférieure à 2% pour les durées qu'on observe (t < 10 h).

## 14.4 Elaboration du modèle simplifié

Finalement, on a obtenu un modèle à quatre paramètres dont la formulation est extrêmement simple : c'est un polynôme de degré deux en (x, t). De plus, sa précision reste très bonne par rapport au modèle. On a vu qu'il permettait de capter l'ensemble des phénomènes sous-jacents. On rappelle son expression :

 $P^2(x,t) = P_e^2 - \eta_{ini}x - 2P_{m1}(0)\eta_{temps_{cccg}}t + \eta_{temps_{cccg}}^2t^2 - \eta_{espace_{cccg}} \left[\frac{x^2 + x_{cccg}^2}{2L} + \frac{L}{3} - \left\{ \begin{array}{cc} x_{cccg} & \text{si } x \leqslant x_{cccg} \\ x & \text{sinon} \end{array} \right]$ 

Coefficient du modèle simplifié	Notation	Expression	Ordre de grandeur
Pertes de charges initiales	$\eta_{ini}$	$\alpha Z_{m2}(0)Q_{Ne}^2$	$6.9 \text{ bara}^2.\text{km}^{-1}$
Pertes de charges temporelles	$\eta_{temps_{cccg}}$	$\frac{Z_{m1}^2(0)\beta Q_{Ncccg}}{L}$	$2.2 \text{ bara.h}^{-1}$
Pertes de charges spatiales	$\eta_{espace_{cccg}}$	$2Z_{m1}(0)\alpha Q_{Ne}Q_{Ncccg}$	$7.3 \text{ bara}^2.\text{km}^1$
Constante de temps	$ au_{cccg}$	$\frac{L\eta_{espace_{cccg}}}{2\pi^2 P_m(0)\eta_{temps_{cccg}}}$	33 min

On dispose donc désormais de trois outils pour étudier les phénomènes de pertes de charges.

- La simulation sous Simone, le logiciel qui reste notre référence pour la validité des raisonnements.
- Le modèle sous forme explicite mais compliqué, facilement implémentable numériquement mais difficilement manipulable physiquement. Par contre, il donne des erreurs inférieures à 2% et concurrence la simulation Simone (6 paramètres à régler pour des résultats instantanés) sous réserve que les hypothèses du modèle soit satisfaites (étude d'artères).
- Un modèle simplifié dont les erreurs sont maîtrisées (< 5%) ce qui rend son utilisation d'autant plus appréciable. Il a de plus l'avantage de distinguer chaque aspect des phénomènes. Il va maintenant être exploité pour répondre à d'autres problématiques d'exploitation du réseau.

# Chapitre 15

# Quelques exemples d'utilisation du modèle simplifié pour répondre à des problématiques de gestion du réseau

On va dans ce chapitre détailler trois exemples d'utilisation du modèle simplifié concernant l'influence des paramètres, le calcul de la durée maximale pendant laquelle on reste au dessus des contraintes de pression et le calcul du temps minimal de démarrage d'un stockage pour stabiliser la pression.

## 15.1 Un diamètre élevé réduit les pertes de charges

On a déjà bien détaillé dans le chapitre précédent comment on pouvait utiliser le modèle simplifié pour étudier simplement l'influence des paramètres sur l'évolution de la pression. On va ici utiliser le modèle pour retrouver un résultats bien connu : un surdimensionnement du réseau permet de réduire les pertes de charges.

Lorsqu'on regarde l'expression des différents coefficients du modèle, on s'aperçoit rapidement qu'ils sont tous inversement proportionnels à une puissance du diamètre :

$$\begin{array}{l} - \eta_{ini} \propto \frac{1}{D^5} \\ - \eta_{espace_{cccg}} \propto \frac{1}{D^5} \\ - \eta_{temps_{cccg}} \propto \frac{1}{D^2} \\ - \tau_{cccg} \propto \frac{1}{D^3} \end{array}$$

C'est dire l'importance du diamètre dans le phénomène de pertes de charges. Ainsi, s'il augmente, tous les paramètres du modèle vont se réduire et donc il y aura une perte de pression globale moindre. Voici ci-dessous l'illustration de ceci. On a représenté le profil de pression temporel à l'entrée et à la sortie de l'artère de Seine avec le diamètre réel (D = 0.744 m) et un autre plus important (D = 1.176 m).

On voit que la durée de diffusion et la perte de pression horaire sont visiblement moindres sur la courbe correpondant au diamètre surdimensionné (bleu), aussi bien à l'entrée qu'à la sortie. De même, la perte de pression initiale à la sortie est moindre pour la courbe bleue.

#### Profil de pression en temps à x = 209.4 km

 $Qcccg = 240000 \text{ Nm}^3/h$   $Qe = 450000 \text{ Nm}^3/h$  Pe = 67 bara L = 209.4 km xcccg = 209.4 km D = 1.176 mM = 17 g/mol PCS = 11.4 kWh/Nm<sup>3</sup> T = 12 °C ke = 10  $\mu$ m Nsérie = 10000 70 Simone D = 0.744 m Modèle D = 0.774 m Modèle simplifié D = 0.744 m 60 Simone D = 1.176 m ----- Modèle D = 1.176 m Modèle simplifié D = 1.176 m 50 Pression [bara] 40 30 20 10 L 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 Temps [h]



 $Qcccg = 240000 \text{ Nm}^3/h$   $Qe = 450000 \text{ Nm}^3/h$  Pe = 67 bara L = 209.4 km xcccg = 209.4 km D = 1.176 m





### 15.2 Calcul du temps associé à la pression minimale

Une fois la CCCG démarrée, la pression ne cesse de chuter. Pour GRTgaz, il s'agit de savoir au bout de combien de temps la pression violera les contraintes.

Plus précisément, on se place en un point de la canalisation  $x_{cana}$ . On fixe une pression minimale à ne pas atteindre en ce point  $P_{min}(x_{cana})$ . La CCCG démarre et la pression chute. On cherche le temps T au bout duquel on atteint cette pression minimale. Grâce au modèle simplifié, on peut voir qu'on obtient directement l'expression ce temps :

$$T \approx \frac{1}{\eta_{temps_{cccg}}} \left[ P_{m1}(0) + \sqrt{P_{m1}^2(0) + P_{min}^2(x_{cana}) - P_0^2(x_{cana}) - f(x_{cana})} \right]$$

On a effectué une application numérique sur les données du cas fictif. On se place à la sortie  $(x_{cana} = L)$  et la pression minimale  $P_{min}(x_{cana})$  est fixée à 45 bara. On obtient alors :

$$T_{modele} = 4$$
 h44 min36.6s et  $T_{simone} = 4$  45 min

### 15.3 Calcul du temps de démarrage d'un stockage

La situation est la même que précédemment : la CCCG démarre et la pression de met à chuter. On sait maintenant calculer le temps où l'on dépassera la pression minimale.

On cherche alors à stabiliser la pression à une certaine valeur  $P_{cana}(x_{cana})$ . On décide pour cela de démarrer un stockage  $Q_{Nstock}$  en  $x_{stock} \leq x_{cccg}$ . Deux questions se posent alors : quand le démarrer et avec quel débit ?

Pour répondre à ces deux questions, il convient de revenir à l'utilisation d'une propriété fondamentale de l'équation de la chaleur : sa linéarité. On rappelle ici l'équation de la chaleur telle qu'on l'a résolu dans le modèle :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} - \gamma(t) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\eta_{espace_{cccg}} \gamma(t) \delta_{cccg}(x) \\ U(x,0) = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial U}{\partial x}(L,t) = 0 \end{cases}$$

La linéarité de l'équation signifie que si U et V sont solutions de l'équation, alors toute combinaison linéaire à coefficients constants de ces deux solutions aU + bV est encore une solution du problème. Cette propriété signifie que l'on peut ajouter autant de consommations ou de prélèvements sur la canalisation que l'on désire, il suffira juste d'ajouter les termes  $B_{masse}(t)$  et  $S_{fourier}(x, t)$  correspondants dans la solution. Introduisons  $t_{min}$ , le temps de démarrage du stockage ainsi que la fonction d'Heaviside :

$$Y_{t_{min}}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \leq t_{min} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans notre cas, la solution que l'on recherche est donc solution de l'équation :

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \gamma(t)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\eta_{espace_{cccg}}\gamma(t)\delta_{cccg}(x) + \eta_{espace_{stockage}}\gamma(t)\delta_{stockage}(x)Y_{t_{min}}(t)$$

On en déduit que la solution s'écrit sous la forme générale :

$$P^{2}(x,t) = P_{e}^{2} - \eta_{ini}x - \eta_{espace_{cccg}} \left[ \frac{\int_{0}^{t} \gamma(s)ds}{L} + \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x_{cccg}}{L}\right) \left(\frac{L}{n\pi}\right)^{2} \left(1 - e^{-\frac{n^{2}\pi^{2} \int_{0}^{t} \gamma(s)ds}{L^{2}}}\right) \right] + \eta_{espace_{stock}} \left[ \frac{\int_{t\min}^{t} \gamma(s)ds}{L} + \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x_{stock}}{L}\right) \left(\frac{L}{n\pi}\right)^{2} \left(1 - e^{-\frac{n^{2}\pi^{2} \int_{t\min}^{t} \gamma(s)ds}{L^{2}}}\right) \right] \right]$$

Comme le bilan de masse change en  $t_{min}$ , il faut faire attention à la nouvelle expression de  $\gamma(t)$ . Comme on cherche à calculer  $t_{min}$ , on va se placer à  $t > t_{min}$ , suffisamment loin pour supposer que le régime des deux séries de Fourier est devenu indépendant du temps. De plus, on va supposer que  $Q_{Nstock} = Q_{Ncccg}$ . L'équation précédente devient alors indépendante du temps :

$$P^{2}(t,x) = P_{e}^{2} - \eta_{ini}x - \frac{\eta_{espace_{cccg}}}{L} \int_{0}^{t_{min}} \gamma(s)ds - \eta_{espace_{cccg}} \left[ \frac{x_{cccg}^{2} - x_{stock}^{2}}{2L} + \begin{cases} x_{stock} - x_{cccg} & \text{si } x \leqslant x_{stock} \leqslant x_{cccg} \\ x - x_{cccg} & \text{si } x_{stock} \leqslant x \leqslant x_{cccg} \\ 0 & \text{si } x_{stock} \leqslant x_{cccg} \leqslant x \end{cases} \right]$$

On retrouve ici une propriété qui avait été mise en évidence dans [16]. Si l'on démarre un stockage de même débit qu'une CCCG, la pression devient indépendante du temps. En utilisant maintenant l'expression simplifié de  $\int_0^t \gamma(s) ds$ , on obtient  $t_{min}$  de la même manière que dans la section précédente. On se place à  $x_{cana}$  et on cherche  $t_{min}$  tel que la pression se stabilise à  $P_{min}(x_{cana})$ . On obtient :

$$t_{min} \approx \frac{1}{\eta_{temps_{cccg}}} \left[ P_{m1}(0) + \sqrt{P_{m1}^2(0) + P_{min}^2(x_{cana}) - P_e^2 + \eta_{ini}x_{cana} + \eta_{espace_{cccg}}} \left[ \frac{x_{cccg}^2 - x_{stock}^2}{2L} + \left\{ \begin{array}{c} x_{stock} - x_{cccg} \\ x_{cana} - x_{cccg} \\ 0 \end{array} \right] \right]$$

# Chapitre 16

# Généralisation du modèle à un état initial quelconque et des conditions de bords différentes

On va ici détailler comment obtenir la solution de l'équation de la chaleur avec une état initial quelconque et des conditions de bords non identiques. On verra ensuite comment adapter ces résultats théoriques à notre problème.

# 16.1 Résolution de l'équation de la chaleur dans le cas général

On cherche à résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} - \gamma(t) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = S(x,t) \\ U(x,0) = U_0(x) \\ \frac{\partial U}{\partial x}(0,t) = e(t) \\ \frac{\partial U}{\partial x}(L,t) = s(t) \end{cases}$$

On va effectuer un relèvement de la fonction U. On introduit donc la fonction V de la forme :

$$V(x,t) = U(x,t) - \left[a(t)x^2 + b(t)x\right]$$

On choisit alors les coefficients a(t) et b(t) de telle manière que les conditions de bords pour V soit nulle.

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x}(0,t) = 0 \Longrightarrow b(t) = e(t) \\ \frac{\partial V}{\partial x}(L,t) = 0 \Longrightarrow a(t) = \frac{s(t) - e(t)}{2L} \end{cases}$$

On injecte ensuite l'expression de V dans l'état initial et dans l'équation d'évolution pour obtenir le nouveau système suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} &- \gamma(t) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = S(x,t) + \gamma(t) \frac{s(t) - e(t)}{L} - xe'(t) - \frac{x^2}{2L} (s'(t) - e'(t)) \\ V(x,0) &= U_0(x) - [a(0)x^2 + b(0)x] \\ \frac{\partial V}{\partial x}(0,t) &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial x}(L,t) &= 0 \end{aligned}$$

On sait alors résoudre ce nouveau système. En effet, l'équation de la chaleur possède une fonction de Green pour un domaine borné avec des conditions de type Neumann nulle au bord<sup>1</sup> :

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{L} + \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2 \int_0^t \gamma(s)ds}{L^2}}$$

La solution V alors alors obtenue par convolution avec la fonction de Green G. On obtient alors pour U la formule suivante :

$$\begin{aligned} U(x,t) &= \frac{s(t) - e(t)}{2L} x^2 + e(t)x + \int_0^L \left[ U_0(\xi) - \left(\frac{s(0) - e(0)}{2L} \xi^2 + e(0)\xi\right) \right] G(x,\xi,t) d\xi \\ &+ \int_0^t \int_0^L \left[ S(\xi,\tau) + \gamma(\tau) \frac{s(\tau) - e(\tau)}{L} - \xi e'(\tau) - \frac{\xi^2}{2L} (s'(\tau) - e'(\tau)) \right] G(x,\xi,t-\tau) d\xi d\tau \end{aligned}$$

Cette expression purement formelle est difficile à manipuler. Par exemple, lorsque t = 0, pour retrouver,  $U(x,0) = U_0(x)$ , il faut remarquer que la première intégrale n'est que la transformée de Fourier de la fonction. Cependant, cette formule a l'avantage d'être très générale. On va maintenant pouvoir l'appliquer à plusieurs cas concrets.

 $<sup>1. \</sup> http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/lpde/lpde102.pdf$ 

# 16.2 Adaptation du problème à un débit initial constant par morceaux

On va ici étudier la cas d'un état initial en régime permanent où plusieurs consommations sont présentes sur la portion de canalisation considérées. Soit N le nombre de consommations présentes sur la portion de canalisation. Elles prélèvent chacune un débit normalisé  $Q_{Ni}$  en  $x_i$  tel qu'à la sortie de la canalisation, le débit soit de  $Q_{Ne} - \sum_{i=1}^{N} Q_{Ni} > 0$ .

Le profil spatial du débit est donc constant par morceaux. L'établisement du régime permanent s'effectue de la même manière que pour la modélisation sur chaque segment  $[x_i, x_{i+1}]$ . On obtient finalement :

$$\begin{cases} \forall x \in [0, x_1], P_0^2(x) = P_e^2 - \alpha Z_{m2}(0)Q_{Ne}^2 x \\ \forall x \in [x_i, x_{i+1}], P_0^2(x) = P_2^0(x_i) - \alpha Z_{m2}(0) \left(Q_{Ne} - \sum_{j=1}^i Q_{Nj}\right)^2 x \quad i = 1...N - 1 \\ \forall x \in [x_N, L], P_0^2(x) = P_2^0(x_N) - \alpha Z_{m2}(0) \left(Q_{Ne} - \sum_{j=1}^N Q_{Nj}\right)^2 x \end{cases}$$

De même, l'intégration entre 0 et L de l'expression finale de  $P_0(x)$  donne une équation du second degré en  $P_{m2}(0)$  ce qui permet de le calculer. On a ainsi établi un état initial en régime permanent avec plusieurs consommations. Comme  $\frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} = 0$  Le calcul de la pression suite au démarrage d'une CCCG s'effectue de la même manière grâce à la variable  $U = P^2 - P_0(x)$  qui va rendre les conditions de bords nulles et l'état initial nul. La formule d'évolution de la pression restera la même sauf que l'expression de la pression initiale en sera modifié. On aura donc :

$$P^{2}(x,t) = P_{0}(x) + B_{masse}(t) + S_{fourier}(x,t)$$

## 16.3 Adaptation du problème à des conditions de bords différentes

On va maintenant considérer plus attentivement les cas extrêmes où la CCCG se situent à la sortie ou à l'entrée ce qui est équivalent à mettre des conditions de bords constantes mais différentes. C'est évidemment le cas de l'artère de Seine et du Midi. Prenons par exemple une CCCG située à la sortie. En posant  $U = P^2 - P_0^2(x)$ , le problème s'écrit donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} - \gamma(t) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \\ U(x,0) = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial x}(0,t) = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial x}(L,t) = -\alpha (Q_{Ne} - Q_{Ncccg})^2 Z_{m2}(0) + \alpha Q_{Ne}^2 Z_{m2}(0) \end{cases}$$

On va ici se retrouver confronter au problème de la linéarisation. En effet, on a supposé dans la modélisation qu'on linéarisait le débit par rapport au débit initial qui était alors aussi le débit des conditions de bords :

$$Q_N^2 \approx Q_{Ne}(2Q_N - Q_{Ne})$$

Lorsque  $Q_N = Q_{Ne}$ , cette approximation est évidemment exacte. Cependant, lorsque  $Q_N \neq Q_{Ne}$  et en particulier pour la condition de bords ci-dessus, l'approximation change la condition de bords en

$$\frac{\partial U}{\partial x}(L,t) \approx -2\alpha Q_{Ne} Q_{Ncccg} Z_{m2}(0) \approx -2\alpha Q_{Ne} Q_{Ncccg} Z_{m1}(0) = -\eta_{espace_{cccg}}$$

La deuxième approximation qui permet de remplacer  $Z_{m2}(0)$  par  $Z_{m1}(0)$  donne des erreurs inférieures à 0.5% donc négligeables. La formule générale du relèvement appliqué à ce cas nous redonne exactement l'expression de la pression que l'on connaissait pour  $x_{cccq} = L$ :

$$P^{2}(x,t) = P_{0}^{2}(x) - \eta_{espace_{cccg}} \frac{\int_{0}^{t} \gamma(s)}{d} sL - \eta_{espace_{cccg}} \left(\frac{x^{2}}{2L} - \frac{L}{6}\right) + \frac{2\eta_{espace_{cccg}L}}{\pi^{2}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n}}{n^{2}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{n^{2}\pi^{2} \int_{0}^{t} \gamma(s) ds}{L^{2}}}$$

On a montré que les formulations du problème en terme de conditions de bords et en terme d'ajout d'un dirac dans le terme source sont équivalentes si l'on suppose la linéarisation au bord, ce qui va borner inférieurement les erreurs. Une solution envisageable est alors de linéariser non plus par rapport au débit initial mais par rapport à un autre débit  $Q_{Nadapte}$ .

Cela revient à modifier l'expression de  $\gamma(t) = \frac{\beta P_{m1}(t)Z_{m1}(t)}{\alpha Q_{Nadapte}}$ . Si l'on cherche à obtenir une évolution de la pression précise à un endroit particulier comme à la sortie, alors il suffit de prendre  $Q_{Nadapte} = Q_{sortie} = Q_{Ne} - Q_{Ncccg}$ . Si le but est de minimiser l'erreur partout dans la canalisation, alors il faut prendre  $Q_{Nadapte} = \frac{Q_{Ne} + Q_{Nsortie}}{2} = Q_{Ne} - \frac{Q_{Ncccg}}{2}$ .

# Sixième partie

# Annexes

# Chapitre 17

# Existence et unicité d'une solution à l'équation

# 17.1 Une équation de type elliptique-parabolique dégénérée

Ce type d'équation été étudié par Hans Wilhem Alt et Stephan Luckhaus dans [10] :

$$\partial_t b^j(u) - \operatorname{div} a^j(b(u), \nabla u) = f^j(b(u)) \quad \text{dans } ]0, T[\times\Omega, \quad j = 1...m,$$

$$b(u) = b^0 \quad \text{sur } \{0\} \times \Omega,$$

$$u = u^D \quad \text{sur } ]0, T[\times\Gamma,$$

$$a^j(b(u), \nabla u) \cdot \nu = 0 \quad \text{sur } ]0, T[\times(\partial\Omega \setminus \Gamma), \quad j = 1...m.$$
(17.1)

### 17.2 Hypothèses sur les données

On présente ici les données nécessaires à l'élaboration du problème (17.1) ainsi que les hypothèses de base qui sont faites.

Données	Notation	Hypothèses
Dimension de départ	n	$n\in \mathbb{N}^*$
Dimension d'arrivée	m	$m \in \mathbb{N}^*$
Domaine temporel	[0,T]	$T \in \mathbb{R}^*_+$
Domaine spatial	Ω	$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert borné lipschitzien
Frontière spatiale	Γ	$\Gamma \subseteq \partial \Omega$ mesurable et dim $\Gamma = n - 1$
Inconnue du problème	u	$u: [0,T]  imes \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^m$
Champs de vecteurs <sup>1</sup>	b	$b(.): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ monotone à gradient continu et $b(0) = 0$
Non-linéarité	a	$a[b(.),.]: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{mn} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ continu en chaque variable
Terme source	f	$f[b(.)]: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ continue
Condition de bords <sup>2</sup>	$u^D$	$u^{D} \in L^{r}\left(0,T;H^{1,r}(\Omega)\right) \cap L^{\infty}\left(\left]0,T\right[\times\Omega\right)$
Condition initiale <sup><math>3</math></sup>	$b^0$	on a $\Psi(b^0) \in L^1(\Omega)$ et $b^0 \in Im(b)$

De plus, les fonctions a, b et f vérifient une condition d'ellipticité et une condition de croissance avec  $r \in [1, +\infty[$ :

$$\begin{cases} \left[a\left(p,q_{1}\right)-a\left(p,q_{2}\right)\right].\left(q_{1}-q_{2}\right) \geqslant c\|q_{1}-q_{2}\|^{r} \\ \|a\left[b(p),q\right]\|+\|f\left[b(p)\right]\| \leqslant c\left[1+B(p)\frac{r-1}{r}+\|q\|^{r-1}\right] \end{cases}$$

### 17.3 Existence d'une solution faible

#### 17.3.1 Théorème d'existence

Sous les hypothèses précédentes et en supposant de plus que  $\partial_t u^D \in L^1(0,T;L^{\infty}(\Omega))$ , le problème (17.1) possède une solution sous forme faible.

#### 17.3.2 Définition d'une solution faible

On appelle  $u \in u^D + L^r(0,T;V^r)$  une solution faible du problème (17.1) si les deux propriétés suivantes sont satisfaites :

1.  $b(u) \in L^{\infty}(0,T;L^{1}(\Omega))$  et  $\partial_{t}b(u) \in L^{r^{*}}(0,T;V^{r^{*}})$  avec  $b^{0}$  comme donnée initiale soit :

$$\int_0^T \langle \partial_t b(u), \zeta \rangle + \int_0^T \int_\Omega \left( b(u) - b^0 \right) \partial_t \zeta = 0$$

pour toute fonction test  $\zeta \in L^r(0,T;V^r) \cap H^{1,1}(0,T;L^{\infty}(\Omega))$  telle que  $\zeta(T) = 0$ .

2.  $a(b(u), \nabla u)$  et f(b(u)) sont dans  $L^{r^*}(]0, T[\times \Omega)$  avec u satisfaisant l'équation :

$$\int_0^T \langle \partial_t b(u), \zeta \rangle + \int_0^T \int_\Omega a(b(u), \nabla u) \cdot \nabla \zeta = \int_0^T \int_\Omega f(b(u)) \zeta$$

pour toute fonction test  $\zeta \in L^r(0,T;V^r)$ .

### 17.4 Théorème d'existence d'une solution régulière

On se place sous les hypothèses précédentes avec  $r \ge 2$  et b continûment lipschitzienne. On suppose de plus qu'il existe une fonction A de b(p) et q telle que  $\nabla_q A = a$  et telle que  $\nabla_p A$  et  $\nabla_p f$  sont mesurables vérifiant :

$$\|\nabla_p A(b(p), q)\|^2 + \|\nabla_p f(b(p))\|^2 + \|A(b(p), 0)\| \leq C(1 + B(p) + \|q\|^r).$$

<sup>1.</sup> Une fonction croissante à gradient continue signifie qu'il existe une fonction convexe de classe  $C^1$  notée  $\Phi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$  telle que  $b = \nabla \Phi$ .

<sup>2.</sup> On définit :  $V^r = \{ v \in H^{1,r}(\Omega) | v = 0 \text{ sur } \Gamma \}$  avec  $r \in [1, +\infty[$ .

<sup>3.</sup> On définit  $\Psi(z) = \sup_{\sigma \in \mathbb{R}^m} (z.\sigma - \Phi(z) + \Phi(0))$  et  $B(z) = \Psi(b(z)) = b(z).z - \Phi(z) + \Phi(0)$ , cette dernière égalité provenant du fait que  $\Phi$  est convexe. Les hypothèses impliquent qu'il existe une fonction mesurable  $u^0$  telle que  $b^0 = b(u^0)$ .
De plus, supposons que  $u^D \in H^{1,r}(0,T; H^{1,r}(\Omega))$  et que  $b^0 = b(u^0)$  pour un  $u^0$  tel que  $u^0 - u^D(0) \in V^r$ . Dans ce cas, on peut montrer qu'il existe une solution faible telle que  $\partial_t b(u) \in L^2(]0, T[\times \Omega)$ . Le problème (17.1) possède donc une solution régulière, c'est à dire une solution u telle que  $\partial_t b(u)$  est une fonction.

## 17.5 Unicité mise sous forme comparative

#### 17.5.1 Théorème de comparaison

On suppose que les données ont les propriétés de continuité suivantes :

Si  $u_-$  est une sous-solution et  $u_+$  une sur-solution tel que  $B(u_{\pm})$  et  $\partial_t (b(u_-) - b(u_+))$ soient dans  $L^1(]0, T[\times \Omega)$ , alors on a  $u_- \leq u_+$ .

#### 17.5.2 Définition d'une sur-solution

On dit que  $u \in L^r(0, T; H^{1,r}(\Omega))$  est une sur-solution si  $u \ge u^D$  sur  $]0, T[\times \Gamma$  et si les deux propriétés suivantes sont satisfaites :

1.  $b(u) \in L^{\infty}(0,T; L^{1}(\Omega))$  et  $\partial_{t}b(u) \in L^{r^{*}}(0,T; V^{r^{*}})$  avec  $b^{0}$  comme donnée initiale tel que :

$$\int_0^T \langle \partial_t b(u), \zeta \rangle + \int_0^T \int_\Omega \left( b(u) - b^0 \right) \partial_t \zeta \leqslant 0$$

pour toute fonction test  $\zeta \in L^r(0,T;V^r) \cap H^{1,1}(0,T;L^{\infty}(\Omega))$  telle que,  $\zeta(0) \leq \zeta(T) = 0$ .

2.  $a(b(u), \nabla u)$  et f(b(u)) sont dans  $L^{r^*}([0, T] \times \Omega)$  avec u satisfaisant l'inégalité :

$$\int_0^T \langle \partial_t b(u), \zeta \rangle + \int_0^T \int_\Omega a(b(u), \nabla u) \cdot \nabla \zeta \leqslant \int_0^T \int_\Omega f(b(u)) \zeta$$

pour toute fonction test  $\zeta \in L^r(0,T;V^r)$  telle que  $\zeta \ge 0$ .

#### 17.5.3 Définition d'une sous-solution

De même, on dit que  $u \in L^r(0,T; H^{1,r}(\Omega))$  est une sous-solution si  $u \leq u^D$  sur  $]0,T[\times \Gamma]$  et si les deux propriétés suivantes sont satisfaites :

1.  $b(u) \in L^{\infty}(0,T; L^{1}(\Omega))$  et  $\partial_{t}b(u) \in L^{r^{*}}(0,T; V^{r^{*}})$  avec  $b^{0}$  comme donnée initiale tel que :

$$\int_0^T \langle \partial_t b(u), \zeta \rangle + \int_0^T \int_\Omega \left( b(u) - b^0 \right) \partial_t \zeta \ge 0$$

pour toute fonction test  $\zeta \in L^r(0,T;V^r) \cap H^{1,1}(0,T;L^{\infty}(\Omega))$  telle que  $\zeta(0) \leq \zeta(T) = 0$ .

2.  $a(b(u), \nabla u)$  et f(b(u)) sont dans  $L^{r^*}([0, T[\times \Omega)]$  avec u satisfaisant l'inégalité :

$$\int_0^T \langle \partial_t b(u), \zeta \rangle + \int_0^T \int_\Omega a(b(u), \nabla u) \cdot \nabla \zeta \ge \int_0^T \int_\Omega f(b(u)) \zeta$$

pour toute fonction test  $\zeta \in L^r(0,T;V^r)$  telle que  $\zeta \ge 0$ .

# 17.6 Application des théorèmes à l'équation d'évolution de la pression

#### 17.6.1 Vérification des hypothèses de départ

Dans notre modélisation, les choses sont assez simples. On a n = m = 1 et on considère un réel  $T = t_{max} > 0$  tel que  $[0, t_{max}]$  désigne le domaine temporel. L'ouvert  $\Omega = ]0, L[$  est borné et lipschitzien avec  $\Gamma = \partial \Omega = \{0\} \times \{L\}$  de dimension 0.

L'inconnue u est la pression P qui est positive. De plus, le modèle du gaz impose  $\delta P \ll 1$ . Ainsi, la pression est majorée. On note  $P_{max} \ll \frac{1}{\delta}$  sa borne supérieure. Il en résulte l'inclusion  $Im \ P \subseteq [0, P_{max}]$ , restreignant l'ensemble de définition de la fonction  $b(.) : [0, P_{max}] \longrightarrow \mathbb{R}$ .  $p \longmapsto \frac{p}{1-\delta p}$ 

Cette fonction est continue strictement croissante<sup>1</sup> ce qui implique directement la bornitude puisqu'alors  $Im \ b \subseteq [b(0), b(P_{max})]$ . De plus, la fonction est positive car b(0) = 0. On définit alors l'application :

$$\Phi(.): [0, P_{max}] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$p \longmapsto -\frac{p}{\delta} - \frac{\log(1 - \delta p)}{\delta^2}$$

Elle est continue et vérifie l'égalité  $\Phi' = b$ . La positivité de b entraîne la croissance de  $\Phi$  et celle de b' sa convexité. Par conséquent,  $\Phi$  est bornée car  $Im \Phi \subseteq [\Phi(0), \Phi(P_{max})]$  et positive car  $\Phi(0) = 0$ . Le champs de vecteurs b est par conséquent croissant à gradient continu.

Par ailleurs, remarquons que la relation de la conservation de la quantité de mouvement donne  $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{-\alpha Q_N^2}{2 \ b(P)}$ . Ensuite, on a supposé que  $Q_N > 0$  et le débit est continu. Il en résulte la majoration suivante :  $\frac{\partial P}{\partial x} \leq \frac{-\alpha Q_{Nmin}^2}{2 \ b(P_{max})}$ . On note  $q_{max}$  cette borne supérieure qui restreint l'ensemble de définition de la non-linéarité  $a(b(.),.): [0, P_{max}] \times ] - \infty, q_{max}] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ .  $(p,q) \longmapsto \beta \sqrt{\frac{-2}{\alpha}} b(p)q$ 

Cette fonction est continue en chacune de ses deux variables. On introduit également le terme source qui, bien que mesure vis-à-vis de x, est une constante vis-à-vis de la pression donc continu :  $f(b(.)) : [0, P_{max}] \longrightarrow \overline{\mathbb{R}_+}$ .  $p \longmapsto -\beta Q_{Ncccq} \delta_{cccq}(x)$ 

1. En effet, sa dérivée  $b'(p) = \frac{1}{(1 - \delta p)^2}$  est clairement strictement positive.

Concernant les conditions de bords, on sait que la pression est bornée et positive. On a donc  $u^D : \{0\} \cup \{L\} \times ]0, T[\longrightarrow [0, P_{max}]]$ . Il en résulte qu'en particulier avec r = 2, on obtient  $u^D \in L^2(0, t_{max}; H^{1,2}(]0, L[)) \cap L^{\infty}(]0, t_{max}[\times]0, L[).$ 

Comme on dispose d'une pression initiale notée  $P_0$ , La condition  $b^0 = b(P_0) \in Im b$ est immédiatement vérifiée. On a de plus  $\Psi(P_0) \in [-\Phi(P_{max}), P_{max}b(P_{max})]$ . Il vient donc  $\Psi(b^0) \in L^1(]0, L[)$ .

La condition d'ellipticité vient du fait que la variable q est majoré par  $q_{max}$ :

$$[a(p,q_1) - a(p,q_2)] \cdot (q_1 - q_2) \ge -\frac{\beta}{2} \sqrt{\frac{2 p}{\alpha q_{max}}} (q_1 - q_2)^2.$$

La condition de croissance va utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz  $2\sqrt{-b(p)q} \leq b(p) - q$ . Ensuite, il suffit de montrer que  $b(p) \leq 2\sqrt{B(p)}$  pour pouvoir conclure. On introduit donc la fonction :  $g: [0, P_{max}] \longrightarrow \mathbb{R}$ . On montre après calcul que la dérivée s'exprime par  $p \longmapsto 4B(p) - b^2(p)$ 

 $g'(p) = \frac{2p(1-2\delta p)}{(1-\delta p)^3}$  qui est positif grâce à l'ordre de grandeur  $\delta P \ll 1$ . La fonction g est par conséquent croissante et on obtient sa positivité par  $Im \ g = [g(0), g(P_{max})]$  et g(0) = 0. On obtient ainsi l'inégalité suivante :

$$\|a[b(p),q]\| + \|f[b(p)]\| \leq \beta \max\left(Q_{Ncccg}\delta_{cccg}(x),\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\right) \left[1 + \sqrt{B(p)} + |q|\right]$$

#### 17.6.2 Existence et unicité d'une solution faible

L'équation de la conservation de la masse intrégrée entre 0 et L avec des condition de bords identiques fournit  $\left(\frac{P}{Z}\right)'_m(t) = \frac{-\beta Q_{Ncccg}}{L} < 0$ . Comme on le pressent, la CCCG prélève du gaz en conduite ce qui fait chuter la pression. Malheureusement, on n'a pas directement accès à  $P'_{entree}(t)$  ni à  $P'_{sortie}(t)$  mais on peut raisonnablement supposer qu'il se comporte comme  $P'_m(t)$ . Ils sont donc de signe constant négatif. Cela entraîne que  $\partial_t u^D \in L^1(0,T; L^{\infty}(\Omega))$ . Les hypothèses étant toutes vérifiées, on sait que notre problème possède une solution faible.

Comme la fonction f est constante vus à vis de p, on a directement :

 $f(p_2) - f(p_1) = 0 \leq (p_2 - p_1) \text{ pour } p_2 > p_1.$ 

En utilisant l'inégalité  $|\sqrt{y} - \sqrt{z}| \leq \sqrt{|z - y|}$  et le fait que q est majoré par  $q_{max}$  ainsi que P par  $P_{max}$ , il vient l'inégalité :

$$||a(b(p_2),q) - a(b(p_1),q)|| \leq \frac{\beta}{1 - \delta P_{max}} \sqrt{\frac{-2}{\alpha q_{max}}} \sqrt{|p_2 - p_1|} ||q|$$

La fonction B étant positive car croissante  $(B'(p) = pb'(p) \ge 0 \Rightarrow Im \ B = [B(0), B(P_{max})])$ avec B(0) = 0, les inégalités du théorème de comparaison sont établies.

Considérons deux solutions u et v. Ce sont toutes deux des sur-solutions et des soussolutions bornées et positives. Au vu de la remarque précédente sur le fait qu'on suppose que la dérivée temporelle d'une solution garde un signe constant, le théorème de comparaison peut s'appliquer car  $B(u), B(v), \partial_t (u - v) \in L^1(]0, T[\times \Omega)$ . On a donc successivement  $u \leq v$ et  $u \geq v$  c'est à dire u = v. Le solution faible trouvée est par conséquent unique.

#### 17.6.3 Régularité de la solution faible obtenue

Il se trouve que l'on ne peut appliquer le théorème de régularité car l'inégalité imposée sur la fonction  $A(b(.),.):[0, P_{max}] \times ] - \infty, q_{max}] \longrightarrow \mathbb{R}$  ne semble pas satisfaite pour r = 2:

$$(p,q) \longmapsto \frac{2\beta}{3} \sqrt{\frac{2}{\alpha}} (-q) \sqrt{-qb(p)}$$
$$\|\nabla_p A(b(p),q)\|^2 + \|\nabla_p f(b(p))\|^2 + \|A(b(p),0)\| = \frac{\beta}{3} \sqrt{\frac{2}{\alpha}} |q|^3 \frac{\left[b'(p)\right]^2}{b(p)}.$$

En effet, le terme en  $|q|^3$  ne semble pouvoir être majoré par un terme en  $q^2$ . Il faudrait donc établir des conditions plus faibles sur le théorème pour assurer une régularité sur la fonction. Ce n'est pas le but de notre étude. La solution faible nous suffit pour assurer une convergence d'un algorithme de simulation.

# Chapitre 18

# Simulation numérique du système d'équations d'évolution

## 18.1 Rappel du problème

On cherche à résoudre le problème d'inconnue  $P : [0, L] \times [0, t_{max}] \longmapsto \mathbb{R}$  grâce au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{P}{Z} \right) + \beta \frac{\partial Q_N}{\partial x} = -\beta Q_{Ncccg} \delta_{cccg}(x) \\ Q_N |Q_N| = \frac{-2P}{\alpha Z} \frac{\partial P}{\partial Z} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{2}{\alpha} \left( \frac{P}{\delta} + \frac{\log Z}{\delta^2} \right) \right] \end{cases}$$

Le domaine étant borné, on impose les conditions de bords suivantes :

$$Q_N(0,t) = Q_N(L,t) = Q_{Ne}$$

## 18.2 Discrétisation de l'équation d'évolution

Afin d'alléger les notations, on notera dans ce chapitre Q au lieu de  $Q_N$  pour désigner le débit normalisé. On discrétise le domaine temporel  $[0, t_{max}]$  avec un pas de temps noté  $\delta t$ ainsi que le domaine spatial [0, L] avec un pas  $\delta x$ . On pose N pour la partie entière de  $\frac{L}{\delta x}$ .



On cherche à résoudre numériquement le problème en utilisant la méthode des volumes finis avec un schéma upwind explicite pour l'évaluation du débit à l'interface :

$$\left(\frac{P}{Z}\right)_{i}^{j+1} = \left(\frac{P}{Z}\right)_{i}^{j} - \beta \frac{\delta t}{\delta x} \left[Q_{i+0.5}^{j} - Q_{i-0.5}^{j} + (Q_{cccg} \text{ si } Q_{cccg} \in V_{i})\right]$$

### 18.3 Calcul de l'état initial

L'état initial est supposé être établi en régime permanent. La première équation du système impose un débit initial constant :

$$0 + \beta \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \Longrightarrow Q(x, 0) = Q(0, 0) = Q_e$$

En reportant cette condition dans la deuxième équation du système, on exprime la pression initiale  $P_0$  sous forme implicite. En notant  $P_e = P(0,0)$ , il vient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{2}{\alpha} \left( \frac{P}{\delta} + \frac{\log Z}{\delta^2} \right) \right] = Q_e^2 \Longrightarrow \delta P_0(x) + \log Z_0(x) = \delta P_e + \log Z_e + \frac{\delta^2 \alpha Q_e^2}{2} x.$$

Il se trouve que dans ce cas particulier, on va pouvoir exprimer  $P_0$  explicitement sous forme d'une série. On pose  $X(x) = \delta P_e + \log Z_e + \frac{\delta^2 \alpha Q_e^2}{2}x$  et  $U = \log Z_0$ . L'équation précédente se réécrit plus simplement :

$$U(X) = (X - 1) + e^{U(X)}.$$

Les fonctions étant toutes holomorphes sur leur ensemble de définition, on peut alors utiliser la formule d'inversion de Lagrange<sup>1</sup> qui permet de calculer explicitement U par la série suivante :

$$U(X) = X - 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}} \left( e^{k(X-1)} \right).$$

On obtient alors une formulation explicite de la pression initiale  $P_0(x)$ :

$$U(X) = X - 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{k^{k-1} e^{k(X-1)}}{k!} \quad \text{et} \quad P_0(x) = \frac{1 - e^{U(X(x))}}{\delta}.$$

Pour une implémentation informatique de cette formule, la présence du factoriel va limiter les calculs sur Matlab jusqu'à n = 143, il est alors nécessaire de simplifier le terme de la série par la célèbre formule de Stirling<sup>2</sup>  $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ . Le terme de la série vaudra alors  $\frac{e^{kX}}{k\sqrt{2\pi k}}$ . Notons également que la série converge car X est ici négatif. En effet, en utilisant le fait que  $-\log(Z_e) \ge \delta P_e + \frac{\delta^2 P_e^2}{2}$ , il vient alors :

$$X(x) \leqslant -\frac{\delta^2}{2} \left( P_e^2 - \alpha Q_e^2 x \right) \leqslant 0.$$

<sup>1.</sup> http://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème\_d'inversion\_de\_Lagrange

 $<sup>2. \</sup> http://fr.wikipedia.org/wiki/Formule\_de\_Stirling$ 

Voici ci-dessous le profil spatial de la pression initiale ainsi que du calcul exact de la pression initial issue des équations de Navier Stokes<sup>3</sup> pour des données similaires à celles de l'artère de Seine. On trace ensuite l'erreur relative commise en négligeant les termes d'inertie dans les équations de Navier Stokes en régime permanent. On constate que l'approximation effectuée est ici quasiment nulle, ce qui justifie l'hypothèse faite, tout du moins pour l'état initial.



3. cf. Validation du modèle

## 18.4 Evaluation du débit normalisé aux interfaces

Soit  $i \in \{1, ..., N-2\}$ . Nous allons utiliser un schéma de type upwind pour calculer la dérivée à l'interface  $i + \frac{1}{2}$ . On a alors :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{2}{\alpha} \left( \frac{P}{\delta} + \frac{\log Z}{\delta^2} \right) \right]_{i+\frac{1}{2}} = \frac{2}{\alpha \delta x} \left[ \left( \frac{P}{\delta} + \frac{\log Z}{\delta^2} \right)_{i+1} - \left( \frac{P}{\delta} + \frac{\log Z}{\delta^2} \right)_{i+1} \right]_{i+\frac{1}{2}} = \frac{2}{\alpha \delta x} \left[ \left( \frac{P}{\delta} + \frac{\log Z}{\delta^2} \right)_{i+1} - \left( \frac{P}{\delta} + \frac{\log Z}{\delta^2} \right)_{i+1} \right]_{i+\frac{1}{2}} = \frac{2}{\alpha \delta x} \left[ \left( \frac{P}{\delta} + \frac{\log Z}{\delta^2} \right)_{i+1} - \left( \frac{P}{\delta} + \frac{\log Z}{\delta^2} \right)_{i+1} \right]_{i+\frac{1}{2}} = \frac{2}{\alpha \delta x} \left[ \left( \frac{P}{\delta} + \frac{\log Z}{\delta^2} \right)_{i+1} - \left( \frac{P}{\delta} + \frac{\log Z}{\delta^2} \right)_{i+\frac{1}{2}} \right]_{i+\frac{1}{2}} = \frac{2}{\alpha \delta x} \left[ \left( \frac{P}{\delta} + \frac{\log Z}{\delta^2} \right)_{i+\frac{1}{2}} - \left( \frac{P}{\delta} + \frac{\log Z}{\delta^2} \right)_{i+\frac{1}{2}} \right]_{i+\frac{1}{2}} = \frac{2}{\alpha \delta x} \left[ \left( \frac{P}{\delta} + \frac{\log Z}{\delta^2} \right)_{i+\frac{1}{2}} - \left( \frac{P}{\delta} + \frac{\log Z}{\delta^2} \right)_{i+\frac{1}{2}} \right]_{i+\frac{1}{2}} + \frac{2}{\alpha \delta x} \left[ \left( \frac{P}{\delta} + \frac{\log Z}{\delta^2} \right)_{i+\frac{1}{2}} - \left( \frac{P}{\delta} + \frac{\log Z}{\delta^2} \right)_{i+\frac{1}{2}} \right]_{i+\frac{1}{2}} + \frac{2}{\alpha \delta x} \left[ \left( \frac{P}{\delta} + \frac{\log Z}{\delta^2} \right)_{i+\frac{1}{2}} - \left( \frac{P}{\delta} + \frac{\log Z}{\delta^2} \right)_{i+\frac{1}{2}} \right]_{i+\frac{1}{2}} + \frac{2}{\alpha \delta x} \left[ \left( \frac{P}{\delta} + \frac{\log Z}{\delta^2} \right)_{i+\frac{1}{2}} - \left( \frac{P}{\delta} + \frac{\log Z}{\delta^2} \right)_{i+\frac{1}{2}} \right]_{i+\frac{1}{2}} + \frac{2}{\alpha \delta x} \left[ \left( \frac{P}{\delta} + \frac{\log Z}{\delta^2} \right)_{i+\frac{1}{2}} - \left( \frac{P}{\delta} + \frac{\log Z}{\delta^2} \right)_{i+\frac{1}{2}} \right]_{i+\frac{1}{2}} + \frac{2}{\alpha \delta x} \left[ \left( \frac{P}{\delta} + \frac{\log Z}{\delta^2} \right)_{i+\frac{1}{2}} \right]_{i+\frac{1}{2}} + \frac{2}{\alpha \delta x} \left[ \left( \frac{P}{\delta} + \frac{\log Z}{\delta^2} \right)_{i+\frac{1}{2}} \right]_{i+\frac{1}{2}} + \frac{2}{\alpha \delta x} \left[ \left( \frac{P}{\delta} + \frac{\log Z}{\delta^2} \right)_{i+\frac{1}{2}} \right]_{i+\frac{1}{2}} + \frac{2}{\alpha \delta x} \left[ \left( \frac{P}{\delta} + \frac{\log Z}{\delta^2} \right)_{i+\frac{1}{2}} \right]_{i+\frac{1}{2}} + \frac{2}{\alpha \delta x} \left[ \left( \frac{P}{\delta} + \frac{\log Z}{\delta^2} \right)_{i+\frac{1}{2}} \right]_{i+\frac{1}{2}} + \frac{2}{\alpha \delta x} \left[ \left( \frac{P}{\delta} + \frac{\log Z}{\delta^2} \right]_{i+\frac{1}{2}} + \frac{2}{\alpha \delta x} \left[ \frac{P}{\delta^2} \right]_{i+\frac{1}{2}} + \frac$$



On peut évaluer le débit à l'interface par un passage à la racine en conservant le signe ce qui donne :

$$Q_{i+0.5} = \sqrt{\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{2}{\alpha} \left(\frac{P}{\delta} + \frac{\log Z}{\delta^2}\right)\right]_{i+\frac{1}{2}}} \quad sign\left[\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{2}{\alpha} \left(\frac{P}{\delta} + \frac{\log Z}{\delta^2}\right)\right]_{i+\frac{1}{2}}\right]$$

Finalement, les conditions de bords nous donnent directement le flux aux interfaces extrémales  $Q_{1-0.5} = Q_{-1+0.5} = Q_e$ 

## 18.5 Présentation des résultats

On présente ci-dessous la simulation du système sur des données proche de l'artère de Seine avec une CCCG située au milieu de la portion de canalisation considérée. Les erreurs relatives sont surtout importantes au niveau de la CCCG (erreur > 4%) alors que c'est justement là que l'on souhaite de la précision. Pour les réduire, il faudrait pouvoir réduire le pas d'espace mais le schéma explicite en temps contraint fortement ce choix (pour dx = 5 km, dt = 1 s) pour avoir une simulation sans oscillations (condition CFL très contraignante).

#### Profil de pression en temps



Erreur relative en temps commise sur la pression entre la simulation et Simone



117

#### Profil de pression en espace



Erreur relative en espace commise sur la pression entre le modèle et Simone



Le but du stage étant une modélisation théorique plutôt que l'élaboration d'un logiciel de simulation précis, nous utiliserons donc Simone, logiciel de confiance, comme référence pour la validation de notre modélisation mathématique.

# Chapitre 19

# Description succincte du modèle P/Z

On va ici reprendre un raisonnement similaire à celui effectué dans la modélisation en choisissant cette fois-ci comme variable de travail  $\frac{P}{Z}$ . On va montrer que ce modèle qualifié de P/Z entraîne des erreurs plus importantes que pour la modélisation classique mais que l'expression du coefficient de diffusivité  $\gamma(t)$  s'en trouve simplifié. Ceci montrera également que la tentation de vouloir faire apparaître  $\frac{P_m(t)}{Z_m(t)}$  dans le coefficient de diffusivité détériore la précision du modèle.

#### 19.1 Etablissement et résolution de l'équation d'évolution

On cherche à résoudre le problème d'inconnue  $P : [0, L] \times [0, t_{max}] \longrightarrow \mathbb{R}$  grâce au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{P}{Z} \right) + \beta \frac{\partial Q_N}{\partial x} = -\beta Q_{Ncccg} \delta_{cccg}(x) \\ Q_N |Q_N| = \frac{-2P}{\alpha Z} \frac{\partial P}{\partial Z} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{2}{\alpha} \left( \frac{P}{\delta} + \frac{\log Z}{\delta^2} \right) \right] \end{cases}$$

Le domaine étant borné, on impose les conditions de bords suivantes :

$$Q_N(0,t) = Q_N(L,t) = Q_{Ne}$$

Une linéarisation du débit par rapport à son état initial permet d'écrire  $\frac{\partial Q}{\partial x} \approx \frac{1}{2Q_{Ne}} \frac{\partial (Q^2)}{\partial x}$ . Pour un débit qui ne change pas de signe, la deuxième équation du système fournit donc  $Q^2 = \frac{-2P}{\alpha Z} \frac{\partial P}{\partial x}$ . En insérant cette relation dans la première équation du système, on obtient après réorganisation des termes :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{P}{Z}\right) - \frac{\beta}{2\alpha Q_{Ne}} \frac{\partial}{\partial x} \left[Z^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{P}{Z}\right)^2\right]\right] = -\beta Q_{Ncccg} \delta_{cccg}(x)$$

On suppose que le facteur de compressibilité moyen dépend peu de la variable spatiale soit  $Z^2 \approx Z_m^2(t)$  et on multiplie par  $\frac{2P_m(t)}{Z_m(t)}$  de chaque côté de l'égalité. En linéarisant la dérivée temporelle  $\frac{2P_m(t)}{Z_m(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{P}{Z}\right) \approx \frac{\partial}{\partial t} \left[ \left(\frac{P}{Z}\right)^2 \right]$ , on obtient finalement en posant  $U = \left(\frac{P}{Z}\right)^2$ :  $\frac{\partial U}{\partial t} \beta P_m(t) Z_m(t) \partial^2 U = \frac{22C}{D} P_m(t) z_m(t)$ 

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\beta P_m(t) Z_m(t)}{\alpha Q_{Ne}} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -2\beta Q_{Ncccg} \frac{P_m(t)}{Z_m(t)} \delta_{cccg}(x).$$

On connaît l'expression de  $\left(\frac{P}{Z}\right)_m(t) = \left(\frac{P}{Z}\right)_m(0) - \frac{\beta Q_{Ncccg}}{L}t$ . On veut faire apparaître cette expression dans le coefficient de diffusivité sinon l'avantage de ce modèle n'apporterais rien de nouveau sinon une complexification du modèle précédent. On suppose alors que  $P_m(t)Z_m(t) \approx Z_m^2(0)\frac{P_m(t)}{Z_m(t)}$  et il vient :  $\gamma(t) = \frac{Z_m(0)\beta}{\alpha Q_{Ne}}\frac{P_m(t)}{Z_m(t)}$ .

On fait l'hypothèse que  $\left(\frac{P}{Z}\right)_m(t) \approx \frac{P_m(t)}{Z_m(t)}$  et on obtient l'équation sous forme finale :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} - \gamma(t) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\eta_{espace_{cccg}} \gamma(t) \delta_{cccg}(x) \\ \eta_{espace_{cccg}} = \frac{2\alpha Q_{Ne} Q_{Ncccg}}{Z_m^2(0)} \\ \eta_{temps_{cccg}} = \frac{\beta Q_{Ncccg}}{L} \\ \int_0^t \gamma(s) . ds = \frac{L}{\eta_{espace_{cccg}}} \left(\frac{2P_m(0)}{Z_m(0)} \eta_{temps_{cccg}} t - \eta_{temps_{cccg}}^2 t^2\right) \end{cases}$$

La résolution de l'équation de la chaleur est donc donnée par la formule :

$$\left(\frac{P}{1-\delta P}\right)^2 = \left(\frac{P}{Z}\right)_0(x) - \eta_{espace_{cccg}}\left[\frac{1}{L}\int_0^t \gamma(s)ds + \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x_{cccg}}{L}\right)\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \left(1 - e^{-\frac{n^2\pi^2\int_0^t \gamma(s)ds}{L^2}}\right)\right]\right].$$

Le passage à la racine et l'inversion de l'homographie permettent finalement de retrouver la pression.

### 19.2 Etablissement de l'état initial

Le choix d'une nouvelle variable de travail implique un établissement de l'état initial vis-àvis de celle-ci. Cette cohérence nous incite à détailler également la manière dont est calculé cet état initial. La première équation du système fournit un débit constant en régime permanent pris égal à  $Q_{Ne}$ . En injectant ceci dans la deuxième équation du système, on obtient après réorganisation des termes :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{P}{Z} \right)_0^2 \right] = -\frac{\alpha Q_{Ne}}{Z_0(x)^2} \approx -\frac{\alpha Q_{Ne}}{Z_m(0)^2}$$

Il en résulte que l'on obtient après intégration membre à membre de l'égalité :

$$\left(\frac{P}{Z}\right)_{0}^{2}(x) = \left(\frac{P}{Z}\right)_{entree}^{2} - \frac{\alpha Q_{Ne}}{Z_{m}(0)^{2}}x$$

Pour calculer  $Z_m(0)$ , on passe à la norme quadratique l'égalité précédente et on obtient une équation du second degré en  $P_m(0)$ :

$$\left[1 - \delta^2 \left(\frac{P}{Z}\right)_{entree}^2\right] P_{m2}^2(0) + 2\delta \left(\frac{P}{Z}\right)_{entree}^2 P_{m2}(0) + \left[\frac{\alpha Q_{Ne}^2 L}{2} - \left(\frac{P}{Z}\right)_{entree}^2\right] = 0$$

Cependant, comme on l'a vu<sup>1</sup>, autant l'approximation de la moyenne du rapport comme rapport des moyennes est justifiée, que ce soit en norme 1 ou 2, autant l'approximation d'une moyenne en norme 1 par une moyenne en norme 2 provoque des erreurs non négligeables. La moyenne intervenant dans le bilan de masse étant en norme 1, il convient de recalculer cette moyenne à partir de l'expression de l'état initial. On trouve après calculs :

$$P_{m1}(0) = \frac{2Z_{m2}(0)}{3L\alpha Q_{Ne}^2} \left[ \left(\frac{P}{Z}\right)_{entree}^3 - \left(\left(\frac{P}{Z}\right)_{entree}^2 - \frac{L\alpha Q_{Ne}^2}{Z_{m2}(0)^2}\right)^{\frac{3}{2}} \right]$$

Voici ci-dessous le profil spatial de la pression initiale calculée pour le modèle classique et pour le modèle P/Z. Les deux modélisations sont comparées au calcul exact de l'état initial en régime permanent issu des équations de Navier Stokes<sup>2</sup>. On peut déjà constater que le modèle P/Z engendre déjà des erreurs plus importantes que le modèle classique mais que celle-ci restent très faibles, tout du moins pour l'état initial.

<sup>1.</sup> cf. Modélisation

<sup>2.</sup> cf. Validation du modèle

Profil spatial de la pression initiale



Erreur relative commise sur la pression en remplaçant l'état initial celui d'un des modèles



# 19.3 Comparaison entre le modèle classique et le modèle P/Z

Les données prises sont proches de celles de l'artère de Seine. Les graphiques ci-après expriment clairement que les approximations faites dans le modèle P/Z donnent de bien moins bon résultats que le modèle classique. Bien que la validité du modèle soit de 8 h, durée moyenne de fonctionnement d'une CCCG, ces erreurs restent autour de 5% pour 2% dans le modèle classique.

#### Profil de pression en temps



Erreur relative en temps commise sur la pression entre le modèle et Simone

 $Qcccg = 240000 \text{ Nm}^3/h$   $Qe = 450000 \text{ Nm}^3/h$  Pe = 67 bara L = 200 km xcccg = 100 km D = 0.75 m



123





Hormis le choix d'une variable de travail plus complexe, la grande différence du modèle P/Z avec le modèle classique est basé sur la volonté d'obtenir un coefficient de diffusivité dont l'expression soit plus simple. Comme le bilan de masse fournit  $\left(\frac{P}{Z}\right)_m(t)$  et que le coefficient de diffusivité est proportionnel à  $P_m(t)Z_m(t)$ , la tentation d'émettre l'hypothèses  $P_m(t)Z_m(t) \approx Z_m^2(0) \left(\frac{P}{Z}\right)_m(t)$  s'avère finalement trop contraignante.

# Chapitre 20

# Graphiques issus des expériences permettant la validation du modèle

Voici ci-dessous les profils spatiaux et temporels de pression ainsi que les erreurs relatives commises par rapport à Simone pour l'ensemble des neuf expériences réalisées dans le cadre de la validation du modèle.

## 20.1 Premier cas

### 20.1.1 Données de départ

Paramètres de référence	Notation	Valeur
Pression atmosphérique	$P_a$	1.01325 bara
Température de référence	$T_0$	0 °C
Constante des gaz parfait	R	$8.314472 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$
Masse molaire de l'air	$M_{air}$	$28.963 \text{ g.mol}^{-1}$
Facteur de compressibilité normalisé de l'air	$Z_{Nair}$	0.99941

Paramètres constants d'une expérience à l'autre	Notation	Valeur
Rugosité apparente de la conduite	ke	$20 \ \mu m$
Masse molaire du gaz	M	$16.043 \text{ g.mol}^{-1}$
Pouvoir calorifique supérieur normalisé du gaz	$PCS_N$	$11.4 \text{ kWh.Nm}^3$
Température intérieure de la canalisation	T	20 °C

Paramètres variant d'une expérience à l'autre	Notation	Valeur
Diamètre intérieur de la conduite	D	0.75 m
Longueur de canalisation	L	400 km
Pression initiale à l'entrée de la canalisation	$P_e$	67 bara
Débit normalisé initial, entrant et sortant	$Q_{Ne}$	$450\ 000\ \mathrm{Nm^3.h^{-1}}$
Débit normalisé de la CCCG	$Q_{Ncccg}$	$160\ 000\ \mathrm{Nm}^3.\mathrm{h}^{-1}$
Emplacement de la CCCG	$x_{cccg}$	200 km

#### 20.1.2 Résultats obtenus en temps



Profil de pression en temps

Qcccg = 160000 Nm<sup>3</sup>/h Qe = 450000 Nm<sup>3</sup>/h Pe = 67 bara L = 400 km xcccg = 200 km D = 0.75 m

Erreur relative en temps commise sur la pression entre le modèle et Simone



#### 20.1.3 Résultats obtenus en espace



Profil de pression en espace





127

## 20.2 Deuxième cas

## 20.2.1 Données de départ

Paramètres de référence	Notation	Valeur
Pression atmosphérique	$P_a$	1.01325 bara
Température de référence		0 °C
Constante des gaz parfait	R	8.314472 J.mol <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup>
Masse molaire de l'air	$M_{air}$	$28.963 \text{ g.mol}^{-1}$
Facteur de compressibilité normalisé de l'air	$Z_{Nair}$	0.99941

Paramètres constants d'une expérience à l'autre	Notation	Valeur
Rugosité apparente de la conduite	ke	$20 \ \mu m$
Masse molaire du gaz	M	$16.043 \text{ g.mol}^{-1}$
Pouvoir calorifique supérieur normalisé du gaz	$PCS_N$	11.4 kWh.Nm <sup>3</sup>
Température intérieure de la canalisation	Т	20 °C

Paramètres variant d'une expérience à l'autre	Notation	Valeur
Diamètre intérieur de la conduite	D	0.75 m
Longueur de canalisation	L	400 km
Pression initiale à l'entrée de la canalisation	$P_e$	67 bara
Débit normalisé initial, entrant et sortant	$Q_{Ne}$	$450\ 000\ \mathrm{Nm^3.h^{-1}}$
Débit normalisé de la CCCG	$Q_{Ncccg}$	$80 \ 000 \ \mathrm{Nm^3.h^{-1}}$
Emplacement de la CCCG	$x_{cccg}$	200 km



Profil de pression en temps







Profil de pression en espace



M = 16.043 g/mol PCS = 11.4 kWh/Nm<sup>3</sup> T = 20 °C ke = 20  $\mu$ m Nsérie = 10000 5 <sub>Г</sub> Modèle t = 0 h 4.5 Modèle t = 11 h Modèle t = 22 h 4 Modèle simplifié t = 0 h Modèle simplifié t = 11 h 3.5 Modèle simplifié t = 22 h Erreur relative [%] 1.5 1 0.5 0 50 100 150 200 250 300 350 400 Distance [km]

 $Qcccg = 80000 \text{ Nm}^3/\text{h}$  Qe = 450000  $\text{Nm}^3/\text{h}$  Pe = 67 bara L = 400 km xcccg = 200 km D = 0.75 m

## 20.3 Troisième cas

## 20.3.1 Données de départ

Paramètres de référence	Notation	Valeur
Pression atmosphérique	$P_a$	1.01325 bara
Température de référence		0 °C
Constante des gaz parfait	R	$8.314472 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$
Masse molaire de l'air	$M_{air}$	$28.963 \text{ g.mol}^{-1}$
Facteur de compressibilité normalisé de l'air	$Z_{Nair}$	0.99941

Paramètres constants d'une expérience à l'autre	Notation	Valeur
Rugosité apparente de la conduite	ke	$20 \ \mu m$
Masse molaire du gaz	M	$16.043 \text{ g.mol}^{-1}$
Pouvoir calorifique supérieur normalisé du gaz	$PCS_N$	11.4 kWh.Nm <sup>3</sup>
Température intérieure de la canalisation	Т	20 °C

Paramètres variant d'une expérience à l'autre	Notation	Valeur
Diamètre intérieur de la conduite	D	0.75 m
Longueur de canalisation	L	400 km
Pression initiale à l'entrée de la canalisation	$P_e$	80 bara
Débit normalisé initial, entrant et sortant	$Q_{Ne}$	$450\ 000\ \mathrm{Nm^3.h^{-1}}$
Débit normalisé de la CCCG	$Q_{Ncccg}$	$160 \ 000 \ \ \mathrm{Nm^3.h^{-1}}$
Emplacement de la CCCG	$x_{cccg}$	200 km



#### Profil de pression en temps

Qcccg = 160000 Nm<sup>3</sup>/h Qe = 450000 Nm<sup>3</sup>/h Pe = 80 bara L = 400 km xcccg = 200 km D = 0.75 m

Erreur relative en temps commise sur la pression entre le modèle et Simone



132



Profil de pression en espace





Qcccg = 160000 Nm<sup>3</sup>/h Qe = 450000 Nm<sup>3</sup>/h Pe = 80 bara L = 400 km xcccg = 200 km D = 0.75 m

## 20.4 Quatrième cas

## 20.4.1 Données de départ

Paramètres de référence	Notation	Valeur
Pression atmosphérique	$P_a$	1.01325 bara
Température de référence		0 °C
Constante des gaz parfait	R	$8.314472 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$
Masse molaire de l'air	$M_{air}$	$28.963 \text{ g.mol}^{-1}$
Facteur de compressibilité normalisé de l'air	$Z_{Nair}$	0.99941

Paramètres constants d'une expérience à l'autre	Notation	Valeur
Rugosité apparente de la conduite	ke	$20 \ \mu m$
Masse molaire du gaz	M	$16.043 \text{ g.mol}^{-1}$
Pouvoir calorifique supérieur normalisé du gaz	$PCS_N$	11.4 kWh.Nm <sup>3</sup>
Température intérieure de la canalisation	Т	20 °C

Paramètres variant d'une expérience à l'autre	Notation	Valeur
Diamètre intérieur de la conduite	D	0.75 m
Longueur de canalisation	L	400 km
Pression initiale à l'entrée de la canalisation	$P_e$	80 bara
Débit normalisé initial, entrant et sortant	$Q_{Ne}$	$450\ 000\ \mathrm{Nm^3.h^{-1}}$
Débit normalisé de la CCCG	$Q_{Ncccg}$	$80 \ 000 \ \mathrm{Nm^3.h^{-1}}$
Emplacement de la CCCG	$x_{cccg}$	200 km

#### 20.4.2 Résultats obtenus en temps



#### Profil de pression en temps







Profil de pression en espace



Qcccg = 80000 Nm<sup>3</sup>/h Qe = 450000 Nm<sup>3</sup>/h Pe = 80 bara L = 400 km xcccg = 200 km D = 0.75 m M = 16.043 g/mol PCS = 11.4 kWh/Nm<sup>3</sup> T = 20 °C ke = 20  $\mu$ m Nsérie = 10000 5 <sub>Г</sub> Modèle t = 0 h 4.5 Modèle t = 11 h Modèle t = 22 h 4 Modèle simplifié t = 0 h Modèle simplifié t = 11 h 3.5 Modèle simplifié t = 22 h Erreur relative [%] 1.5 1 0.5 0 50 100 150 200 250 300 350 400 Distance [km]

## 20.5 Cinquième cas

## 20.5.1 Données de départ

Paramètres de référence	Notation	Valeur
Pression atmosphérique	$P_a$	1.01325 bara
Température de référence		0 °C
Constante des gaz parfait	R	8.314472 J.mol <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup>
Masse molaire de l'air	$M_{air}$	$28.963 \text{ g.mol}^{-1}$
Facteur de compressibilité normalisé de l'air	$Z_{Nair}$	0.99941

Paramètres constants d'une expérience à l'autre	Notation	Valeur
Rugosité apparente de la conduite	ke	$20 \ \mu m$
Masse molaire du gaz	M	$16.043 \text{ g.mol}^{-1}$
Pouvoir calorifique supérieur normalisé du gaz	$PCS_N$	11.4 kWh.Nm <sup>3</sup>
Température intérieure de la canalisation	Т	20 °C

Paramètres variant d'une expérience à l'autre	Notation	Valeur
Diamètre intérieur de la conduite	D	1 m
Longueur de canalisation	L	230 km
Pression initiale à l'entrée de la canalisation	$P_e$	67 bara
Débit normalisé initial, entrant et sortant	$Q_{Ne}$	$450\ 000\ \mathrm{Nm^3.h^{-1}}$
Débit normalisé de la CCCG	$Q_{Ncccg}$	$160 \ 000 \ \ \mathrm{Nm^3.h^{-1}}$
Emplacement de la CCCG	$x_{cccg}$	110 km



Profil de pression en temps





Qcccg = 160000 Nm<sup>3</sup>/h Qe = 450000 Nm<sup>3</sup>/h Pe = 67 bara L = 230 km xcccg = 110 km D = 1 m



Profil de pression en espace

Erreur relative en espace commise sur la pression entre le modèle et Simone



Qcccg = 160000 Nm<sup>3</sup>/h Qe = 450000 Nm<sup>3</sup>/h Pe = 67 bara L = 230 km xcccg = 110 km D = 1 m

## 20.6 Sixième cas

## 20.6.1 Données de départ

Paramètres de référence	Notation	Valeur
Pression atmosphérique	$P_a$	1.01325 bara
Température de référence		0 °C
Constante des gaz parfait	R	8.314472 J.mol <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup>
Masse molaire de l'air	$M_{air}$	$28.963 \text{ g.mol}^{-1}$
Facteur de compressibilité normalisé de l'air	$Z_{Nair}$	0.99941

Paramètres constants d'une expérience à l'autre	Notation	Valeur
Rugosité apparente de la conduite	ke	$20 \ \mu m$
Masse molaire du gaz	M	$16.043 \text{ g.mol}^{-1}$
Pouvoir calorifique supérieur normalisé du gaz	$PCS_N$	11.4 kWh.Nm <sup>3</sup>
Température intérieure de la canalisation	Т	20 °C

Paramètres variant d'une expérience à l'autre	Notation	Valeur
Diamètre intérieur de la conduite	D	1 m
Longueur de canalisation	L	230 km
Pression initiale à l'entrée de la canalisation	$P_e$	67 bara
Débit normalisé initial, entrant et sortant	$Q_{Ne}$	$450\ 000\ \mathrm{Nm^3.h^{-1}}$
Débit normalisé de la CCCG	$Q_{Ncccg}$	$80 \ 000 \ \mathrm{Nm^3.h^{-1}}$
Emplacement de la CCCG	$x_{cccg}$	110 km

#### 20.6.2 Résultats obtenus en temps



#### Profil de pression en temps

Erreur relative en temps commise sur la pression entre le modèle et Simone



#### 20.6.3 Résultats obtenus en espace



Profil de pression en espace

Erreur relative en espace commise sur la pression entre le modèle et Simone



## 20.7 Septième cas

## 20.7.1 Données de départ

Paramètres de référence	Notation	Valeur
Pression atmosphérique	$P_a$	1.01325 bara
Température de référence		0 °C
Constante des gaz parfait	R	8.314472 J.mol <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup>
Masse molaire de l'air	$M_{air}$	$28.963 \text{ g.mol}^{-1}$
Facteur de compressibilité normalisé de l'air	$Z_{Nair}$	0.99941

Paramètres constants d'une expérience à l'autre	Notation	Valeur
Rugosité apparente de la conduite	ke	$20 \ \mu m$
Masse molaire du gaz	M	$16.043 \text{ g.mol}^{-1}$
Pouvoir calorifique supérieur normalisé du gaz	$PCS_N$	11.4 kWh.Nm <sup>3</sup>
Température intérieure de la canalisation	Т	20 °C

Paramètres variant d'une expérience à l'autre	Notation	Valeur
Diamètre intérieur de la conduite	D	1 m
Longueur de canalisation	L	230 km
Pression initiale à l'entrée de la canalisation	$P_e$	80 bara
Débit normalisé initial, entrant et sortant	$Q_{Ne}$	$450\ 000\ \mathrm{Nm^3.h^{-1}}$
Débit normalisé de la CCCG	$Q_{Ncccg}$	$160 \ 000 \ \ \mathrm{Nm^3.h^{-1}}$
Emplacement de la CCCG	$x_{cccg}$	110 km

#### 20.7.2Résultats obtenus en temps



#### Profil de pression en temps





Erreur relative en temps commise sur la pression entre le modèle et Simone


Profil de pression en espace

Erreur relative en espace commise sur la pression entre le modèle et Simone



## 20.8 Huitième cas

### 20.8.1 Données de départ

Paramètres de référence	Notation	Valeur
Pression atmosphérique	$P_a$	1.01325 bara
Température de référence		0 °C
Constante des gaz parfait	R	8.314472 J.mol <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup>
Masse molaire de l'air	$M_{air}$	$28.963 \text{ g.mol}^{-1}$
Facteur de compressibilité normalisé de l'air	$Z_{Nair}$	0.99941

Paramètres constants d'une expérience à l'autre	Notation	Valeur
Rugosité apparente de la conduite	ke	$20 \ \mu m$
Masse molaire du gaz	M	$16.043 \text{ g.mol}^{-1}$
Pouvoir calorifique supérieur normalisé du gaz	$PCS_N$	11.4 kWh.Nm <sup>3</sup>
Température intérieure de la canalisation	Т	20 °C

Paramètres variant d'une expérience à l'autre	Notation	Valeur
Diamètre intérieur de la conduite	D	1 m
Longueur de canalisation	L	230 km
Pression initiale à l'entrée de la canalisation	$P_e$	80 bara
Débit normalisé initial, entrant et sortant	$Q_{Ne}$	$450\ 000\ \mathrm{Nm^3.h^{-1}}$
Débit normalisé de la CCCG	$Q_{Ncccg}$	$80 \ 000 \ \mathrm{Nm^3.h^{-1}}$
Emplacement de la CCCG	$x_{cccg}$	110 km

#### 20.8.2 Résultats obtenus en temps



Profil de pression en temps

Erreur relative en temps commise sur la pression entre le modèle et Simone



2 2



Profil de pression en espace

Erreur relative en espace commise sur la pression entre le modèle et Simone



Qcccg = 80000 Nm<sup>3</sup>/h Qe = 450000 Nm<sup>3</sup>/h Pe = 80 bara L = 230 km xcccg = 110 km D = 1 m

### 20.9 Neuvième cas

### 20.9.1 Données de départ

Paramètres de référence	Notation	Valeur
Pression atmosphérique	$P_a$	1.01325 bara
Température de référence		0 °C
Constante des gaz parfait	R	$8.314472 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$
Masse molaire de l'air	$M_{air}$	$28.963 \text{ g.mol}^{-1}$
Facteur de compressibilité normalisé de l'air	$Z_{Nair}$	0.99941

Paramètres constants d'une expérience à l'autre	Notation	Valeur
Rugosité apparente de la conduite	ke	$20 \ \mu m$
Masse molaire du gaz	M	$16.043 \text{ g.mol}^{-1}$
Pouvoir calorifique supérieur normalisé du gaz	$PCS_N$	11.4 kWh.Nm <sup>3</sup>
Température intérieure de la canalisation	Т	20 °C

Paramètres variant d'une expérience à l'autre	Notation	Valeur
Diamètre intérieur de la conduite	D	0.5 m
Longueur de canalisation	L	100 km
Pression initiale à l'entrée de la canalisation	$P_e$	70 bara
Débit normalisé initial, entrant et sortant	$Q_{Ne}$	$300 \ 000 \ \mathrm{Nm^3.h^{-1}}$
Débit normalisé de la CCCG	$Q_{Ncccg}$	$80 \ 000 \ \mathrm{Nm^3.h^{-1}}$
Emplacement de la CCCG	$x_{cccg}$	50 km



Profil de pression en temps

Erreur relative en temps commise sur la pression entre le modèle et Simone Qcccg = 80000 Nm<sup>3</sup>/h Qe =  $300000 \text{ Nm}^3$ /h Pe = 70 bara L = 100 km xcccg = 50 km D = 0.5 m

M = 16.043 g/mol PCS = 11.4 kWh/Nm<sup>3</sup> T = 20 °C ke = 20  $\mu$ m Nsérie = 10000 8 Modèle x = 0 km Modèle x = 50 km 7 Modèle x = 100 km Modèle simplifié x = 0 km 6 Modèle simplifié x = 50 km Modèle simplifié x = 100 km **∑** 5 Erreur relative 2 1 0 0.5 1.5 2 2.5 3 3.5 4 4.5 1 5 Temps [h]



Profil de pression en espace

Erreur relative en espace commise sur la pression entre le modèle et Simone Qcccg = 80000 Nm<sup>3</sup>/h Qe =  $300000 \text{ Nm}^3$ /h Pe = 70 bara L = 100 km xcccg = 50 km D = 0.5 m

M = 16.043 g/mol PCS = 11.4 kWh/Nm<sup>3</sup> T = 20 °C ke = 20  $\mu$ m Nsérie = 10000 8 Modèle t = 0 h Modèle t = 2.5 h 7 Modèle t = 5 h Modèle simplifié t = 0 h 6 Modèle simplifié t = 2.5 h Modèle simplifié t = 5 h **%** 5 Erreur relative [ 2 1 0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 Distance [km]

# Conclusion

La problématique des CCCG incite GRTgaz à considérer de plus en plus la dynamique dans sa stratégie de gestion du réseau de transport de gaz. A partir d'hypothèses raisonnables, on a élaboré un modèle qui reflète ce que donne le logiciel Simone avec une très bonne précision (erreur < 2%).

Il s'ensuit l'émergence d'un modèle simplifié qui permet de décomposer les phénomènes, de les étudier un par un et de caractériser leur comportements par quatre coefficients qui s'expriment simplement en fonction des paramètres, tout cela en restant dans des erreurs inférieures à 5%.

L'équation de la chaleur étant linéaire, on a additivité des termes sources et il est donc possible d'ajouter facilement des consommations ou des prélèvements sur la canalisation. De plus, il est possible de résoudre l'équation de la chaleur avec un état initial et des conditions de bords quelconques.

Le modèle simplifié permet de calculer le temps au bout duquel on atteint une pression minimale. Il est également possible de modéliser la flexibilité et d'obtenir des temps de démarrage de stockage pour stabiliser la pression. Ceci permet de répondre concrètement à des stratégies de gestion de réseau, en élaborant des scénarios à paramètres calculés au fur et à mesure.

Cependant, le modèle ne permet pas de considérer une fourche ou un réseau complexe. De plus, le sens du flux est fixé. Le but de ce modèle n'est donc pas de rivaliser avec simone pour des études sur un réseau complexe mais plutôt de donner des ordres de grandeurs rapides sur des études d'artères locales.

A long terme, il s'agirait de pouvoir intégrer sa vision simple de la dynamique dans les outils d'aide à la décision actuellement utilisés en régime permanent.

# Bibliographie

- [1] Aide-mémoire de l'industrie du gaz. Association Technique de l'Industrie du Gaz en France, 1990.
- [2] Le gaz naturel : production, traitement, transport. Publications de l'Institut Français du Pétrole, 1994.
- [3] Vade-Mecum des études. GDF SUEZ, 1994.
- [4] Fluid Flow Handbbook. McGrow-Hill Handbook, 2002.
- [5] LE ROUX Alain-Yves. Théorème d'existence et unicité pour une équation quasi-linéaire avec conditions aux limites. Université de Bordeaux, 1999.
- [6] McKEEL Scott Andrew. Numerical simulation of the transition region in hypersonic flow. 1996.
- [7] JACQUIAU Arthur. Etat de l'art sur les CCCG. GDF SUEZ, 2009.
- [8] JACQUIAU Arthur. Etude théorique de l'impact des CCCG : évolution de la pression moyenne sur une canalisation. Technical report, GDF SUEZ, 2009.
- [9] DRONIOU Jérôme et IMBERT Cyril. Solutions de viscosité et solutions variationnelles pour EDP non-linéaires. Université de Montpellier, 2004.
- [10] ALT Hans Wilhelm et LUCKHAUS Stephan. Quasilinear elliptic-parabolic differential equations. *Mathematische Zeitschrift*, 1983.
- [11] DUBOIS François. Lemmes finis pour la dynamique des gaz. PhD thesis, Conservatoire National des Arts et Métiers et Université Paris Sud, 2006.
- [12] Eric Goncalvès. Résolution numérique des équations d'euler monodimensionnelles. Institut Polytechnique de Grenoble, 2008.
- [13] MARTIN Jacques. Contribution à l'étude du vidage d'une canalisation de transport par la torche. Technical report, Gaz de France, 1962.
- [14] SELME Marie-Odile. Physique statistique. Cours de première année à l'Ecole des Mines de Nancy, 2007.
- [15] FOURAR Mostafa. Mécanique des solides et des fluides. Cours de première année à l'Ecole des Mines de Nancy, 2005.
- [16] CASTELLAN Natacha. Bilan des observations issues de nos études sur le transfert de flexibilité pour un CCG via une artère. Technical report, GDF SUEZ, novembre 2009.
- [17] CASTELLAN Natacha. Démarrage et arrêt d'un CCG en aval de l'artère de Seine. Technical report, GDF SUEZ, 2009.
- [18] HOEVEN Tom van der. Gas Transport Pipe. Technical report, Pipeline Simulation Interest Group, 2007.