ENSEM, 1A, ANA-1
Analyse Numérique et Algorithmes

TD 5
Résolution de systèmes linéaires

Exercice 1: *Manipulation des systèmes linéaires et propriétés.*
On s'intéresse ici à quelques manipulations et propriétés d'une matrice particulière: la matrice de Hilbert d'ordre n, que nous appellerons A_n. En utilisant l'aide, trouvez les commandes Matlab qui vous permettent de construire cette matrice. On considère maintenant l'entier n comme allant de 2 à 30, et, pour chaque valeur, on considère le vecteur x_n de R^n dont la i-ème composante vaut i, pour i allant de 1 à n. Construisez ce vecteur et calculez le vecteur $b_n = A_n x_n$. Ce dernier vecteur devient maintenant un second membre. On se propose alors de calculer y_n solution de $A_n y_y = b_n$. Qu'en pensez-vous *a priori*? Calculer alors avec Matlab ce vecteur grâce à la commande anti-slash. Qu'arrive t-il? Comment relier et expliquer ce résultat par rapport au cours?

Exercice 2: *Résolution de l'équation de la chaleur.*

On s'intéresse ici à la résolution de l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = 0, \quad x \in]0;10[, \\ u(0,t) = u(10,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = [1-(x-5)^2]^+ = \max(1-(x-5)^2, 0), \quad x \in]0;10[. \end{cases} \tag{1}$$

Le but est de programmer et d'analyser la solution de cette équation par différences finies, et notamment la solution de systèmes linéaires par différentes méthodes.

1) Programmer le schéma explicite pour calculer la température au temps $T = 1$. On mettra en variable d'entrée le pas de temps δt et le pas d'espace δx. On représentera sur le même graphe la température initiale et la température finale. On évaluera aussi le temps de calcul en utilisant les fonctions *tic* et *toc* de Matlab. Utilisez au mieux les matrices sous Matlab avec notamment les structures creuses: "sparse", que vous comparerez à la version pleine: "full".

   Augmenter progressivement le rapport $\delta t/\delta x^2$ pour voir apparaître le phénomène d'instabilité.

2) Programmer maintenant le schéma implicite avec la même philosophie de travail. Faire une première version où la résolution du système linéaire utilise la commande /, puis en utilisant la factorisation de Choleski, une factorisation LU et le gradient conjugué (commande "cgs"). Comparer les temps de calculs pour ces diverses méthodes. Vérifier qu'aucun phénomène d'instabilité n'apparaît. Notez notamment les variations du conditionnement des systèmes linéaires en fonction des pas.