

TD 4

Résolution numérique d'équations différentielles

Exercice 1: Stabilité théorique et stabilité numérique

Matlab dispose de plusieurs solveurs d'équations différentielles, les deux plus simples sont *ode23* et *ode45*. Ils s'utilisent comme ceci :

* L'équation différentielle doit être ramenée à une équation, éventuellement vectorielle, mais du premier ordre en temps ; par exemple l'équation $x'' + 2x' - tx = 0$, s'écrit

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t & -2 \end{pmatrix} y \text{ où on a posé } y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$$

* Le système est codé sous forme d'un fichier qui étant donné y et t renvoie $y'(t)$; créons ici le fichier *essai.m* suivant :

```
function dy = essai(t,y);  
dy = [y(2); t * y(1) - 2 * y(2)];
```

Dans le cas où l'équation est vectorielle, la dérivée doit obligatoirement être un vecteur colonne et non un vecteur ligne. Dans le cas des équations à coefficients constants, il est nécessaire de taper la ligne *function dy = essai(t,y)* même si dy ne dépend pas du temps t .

* On peut ensuite utiliser un solveur Matlab avec la commande :

$$[t, y] = \text{ode23}('essai', [t_{initial}, t_{final}], y_0)$$

où $t_{initial}$ et t_{final} sont les instants entre lesquels on cherche à approcher la solution et où y_0 est la condition initiale.

Les algorithmes sont à pas adaptatifs le vecteur t contient les instants pour lesquels une valeur approchée de la solution y a été calculée ; si l'on souhaite connaître la solution à des instants bien particulier, par exemple pour un pas de temps régulier, il suffit de remplacer le vecteur $[t_{initial}, t_{final}]$ par le vecteur temps souhaité.

Application : résoudre théoriquement l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y'(t) = 3y(t) - 3t \\ y(0) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Le problème est-il stable ? Résoudre ce problème à l'aide des solveurs *ode23* et *ode45* entre 0 et *tmax* pour *tmax* compris entre 5 et 20. Que constate-t-on? Comparer les 3 solutions en les traçant sur un même graphique. Expliquer ce que vous observez.

Exercice 2: Trajectoire d'une balle de tennis

On peut considérer qu'entre deux coups, une balle de tennis, est soumise à trois forces son poids, la force de frottement et la force de Magnus qui sont données par :

$$\begin{aligned}\vec{P} &= m\vec{g} \\ \vec{D} &= -D_L(v)\frac{\vec{v}}{v} \\ \vec{M} &= M_L(v)\frac{\vec{\omega}}{\omega} \wedge \frac{\vec{v}}{v}\end{aligned}$$

Où $\vec{v}$ et $\vec{\omega}$ désignent respectivement le vecteur vitesse et le vecteur rotation instantanée de la balle. La théorie des fluides donne :

$$\begin{aligned}D_L(v) &= \frac{1}{2}C_D\frac{\pi d^2}{4}\rho v^2 \\ M_L(v) &= \frac{1}{2}C_M\frac{\pi d^2}{4}\rho v^2\end{aligned}$$

Où ρ est la densité de l'air. Dans le domaine de vitesse $13.6 \text{ m.s}^{-1} \leq v \leq 28 \text{ m.s}^{-1}$, on peut considérer que :

$$\begin{aligned}C_D &= 0.508 + \frac{1}{22.503 + 4.196\left(\frac{v}{\omega}\right)^{2/5}} \\ C_M &= \frac{1}{2.022 + 0.981\left(\frac{v}{\omega}\right)}\end{aligned}$$

Nous allons étudier le cas d'un lob pour lequel le vecteur $\vec{\omega}$ est dans le plan horizontal et est orthogonal au vecteur $\vec{v}_0$. Dans ce cas, la trajectoire de la balle reste dans un plan vertical que nous rapportons au repère (Oxz) . Les équations du mouvement s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = -C_D\alpha v\dot{x}(t) + C_M\alpha v\dot{z}(t) \\ \ddot{z}(t) = -g - C_D\alpha v\dot{z}(t) - C_M\alpha v\dot{x}(t) \end{cases} \quad \text{où } \alpha = \frac{\pi\rho d^2}{8m}$$

Avec $x(0) = 0$, $z(0) = h$, $\dot{x}(0) = v_0 \cos \theta$, $\dot{z}(0) = v_0 \sin \theta$.

Résoudre théoriquement ce système dans le cas d'une trajectoire dans le vide : $C_D = C_M = 0$. Au bout de combien de temps intervient le premier rebond ?

Puis à l'aide de Matlab, dans l'air en l'absence de lift : $C_M = 0$.

Et finalement dans le cas du lift.

Tracer les trois courbes sur le même graphique. Quelle est la durée du lob dans chacun des trois cas ?

Valeurs numériques :

$$\begin{aligned}g &= 9.81 \text{ m.s}^{-2}, d = 0.063 \text{ m}, m = 0.05 \text{ kg}, \rho = 1.29 \text{ kg.m}^{-3}, \omega = 20 \text{ rad.s}^{-1} \\ h &= 1 \text{ m}, v_0 = 25 \text{ m.s}^{-1}, \theta = 15^\circ.\end{aligned}$$