TD 3

Dérivation et intégration numériques

Le but de ce TP est la résolution numérique approchée d'équations différentielles par la méthode des différences finies.

Soit l'équation différentielle, avec conditions aux bords de Dirichlet homogènes, suivante :

$$\begin{cases} -y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x) \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

On discrétise l'intervalle $[0, 1]$ en $n + 2$ points équidistants :

$$x_k = \frac{k}{n+1} = kh \text{ pour } 0 \leq k \leq n+1$$

On note y_k, p_k, q_k et f_k la valeur des fonctions y, p, q et f au point $x_k, 0 \leq k \leq n+1$. On approche alors les dérivées premières et secondes de y par les formules centrées :

$$y'(x_k) = \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} \text{ et } y''(x_k) = \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} \text{ pour } 1 \leq k \leq n$$

Ce qui permet d'obtenir un système de n équations à n inconnues $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Ecrire la matrice de ce système. Ecrire ensuite une fonction Matlab qui permette de construire cette matrice puis de résoudre le système associé à l'équation différentielle. Visualiser la solution approchée.

Fonction Matlab utile : diag

Choisir des fonctions p, q et f permettant de connaître théoriquement la solution de l'équation différentielle. On mesure l'erreur entre la solution théorique $\hat{y}$ et la solution approchée y par :

$$e = \max_{0 \leq k \leq n+1} |y_k - \hat{y}(x_k)|$$

Tracer la variation de e en fonction du pas h .