ENSEM 2A MI-3
Mathématiques pour l'Ingénieur

TD 3
Formulations variationnelles de problèmes elliptiques
et espaces de Sobolev

Exercice 1 *On décide ici d'étudier le problème aux limites de type Laplacien avec condition aux limites de Dirichlet*

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \textit{dans } \Omega, \\ u_{|\partial\Omega} = 0, & \textit{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{1}$$

où Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de régularité $\mathcal{C}^1$, f un second membre de l'espace $L^2(\Omega)$.

1) *Etablissez la formulation variationnelle associée à (1) en prenant soin de préciser le cadre fonctionnel.*

2) a) *Enoncez le théorème de Lax-Milgram vu en cours en faisant attention à toutes les hypothèses.*
   b) *Démontrez alors que la formulation variationnelle établie précédemment admet une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$.*

3) *Montrer, en supposant que $u \in H^2(\Omega)$, que cette solution est la solution du problème fort (1).*

4) *Prouver la proposition suivante: Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $f \in L^2(\Omega)$. L'application qui à f dans $L^2(\Omega)$ fait correspondre un unique $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de la formulation variationnelle établie en 2.b) est linéaire et continue de $L^2(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. En particulier, on a l'inégalité d'énergie*

$$(\exists C > 0)(\forall f \in L^2(\Omega)) \qquad ||u||_{H^1(\Omega)} \leq C||f||_{L^2(\Omega)}. \tag{2}$$

5) *Enoncer, grâce à un résultat vu en cours, la caractérisation de $u \in H_0^1(\Omega)$ unique solution de (1) en terme de minimisation d'énergie.*

Exercice 2 *On considère le problème aux limites de Neumann*

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, & \textit{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g, & \textit{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{3}$$

où $\mathbf{n}$ est la normale unitaire sortante au domaine Ω, ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de classe $\mathcal{C}^1$. La donnée volumique f est supposée appartenir à $L^2(\Omega)$ et celle du bord $g \in L^2(\partial\Omega)$.

1) *Donner la formulation variationnelle de ce problème en précisant les espaces fonctionnels. Quelles différences a-t-on avec le problème de Dirichlet?*

2) *Montrer l'existence et l'unicité de la solution u de la formulation variationnelle grâce au théorème de Lax-Milgram.*

3) *Supposons que si g est la trace d'un fonction de $H^1(\Omega)$, alors la solution u de la formulation variationnelle soit dans $H^2(\Omega)$. Retrouvez alors, sous cette hypothèse supplémentaire, la formulation forte (3).*

4) *Enoncer ces derniers résultats sous la forme d'un théorème.*

5) *Donner une formulation équivalente à celle de la formulation variationnelle en terme de minimisation d'énergie.*

6) *Que pensez-vous du problème aux limites*

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \textit{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g, & \textit{sur } \Gamma. \end{cases} \tag{4}$$