ENSEM 2A MI-3
Mathématiques pour l'Ingénieur

TD 2
Distributions - Espaces de Sobolev

Exercice 1 *Montrer que si* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite d'éléments de* $L^2(\Omega)$ *(*Ω *ouvert de* $\mathbb{R}^p$*) telle que* $f_n \to_{n\to\infty} f$ *dans* $L^2(\Omega)$*, alors* $T_{f_n} \to_{n\to\infty} T_f$ *dans* $\mathcal{D}'(\Omega)$*.*

Exercice 2 *Pour tout entier* $m \in \mathbb{N}$*, on pose*

$$H^m(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^p, |\alpha| \leq m\right\}. \tag{1}$$

On le munit du produit scalaire

$$(u,v)_{m,\Omega} = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx \tag{2}$$

et de la norme associée: $\|u\|_{m,\Omega} = (u,u)_{m,\Omega}^{1/2}$*. Montrer que* $H^m(\Omega)$ *est un espace de Hilbert.*

Exercice 3 *Soit* $\Omega =]-1;1[$ *et* $f(x) = |x|$*. Montrer alors*

1. *que* $f \in H^1(\Omega)$
2. *et que* $f \notin H^2(\Omega)$*.*

Exercice 4 *(Inégalité de Poincaré) Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *borné dans au moins une direction de l'espace. Il existe alors une constante* $C > 0$ *telle que, pour toute fonction* $v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ *qui s'annule sur le bord* $\partial\Omega$*, on ait*

$$\int_\Omega |v(x)|^2 dx \leq C \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx. \tag{3}$$