ENSEM 2A MI-3
Mathématiques pour l'Ingénieur

TD 1
Distributions

Exercice 1 *Les applications T suivantes sont elle des distributions?*

i) $< T, \varphi >= |\varphi(0)|$

ii) $< T, \varphi >= a$, *pour* $a \in \mathbb{C}$

iii) $< T, \varphi >= \int_0^1 \varphi(t)dt$

iv) $< T, \varphi >= \int_0^1 |t|^\alpha \varphi(t)dt$

v) $< T, \varphi >= \sum_{p=0}^{n} \varphi^{(p)}(0)$, *avec* $n \in \mathbb{N}$

Exercice 2 *Calculer dans $\mathcal{D}'$ la limite quand n tend vers l'infini des suites de fonctions $(f_n)_n$ définies sur $\mathbb{R}$ par*

i) $f_n(x) = sin(nx)$

ii) $f_n(x) = ne^{-n^2x^2}$

Exercice 3 *Calculer dans $\mathcal{D}'$ les dérivées des fonctions suivantes*

i) $f(x) = 1$

ii) $f(x) = sg(x)$ *(= 1 si $x > 0$ et -1 si $x < 0$)*

iii) $f(x) = |x|$

iv) $f(x) = Y(x)\sin(x)$

v) $f(x) = Y(x)\cos(x)$

Exercice 4 *Calculer dans $\mathcal{D}'$*

i) $(\frac{d}{dx} - \alpha)Y(x)e^{\alpha x}$, *pour* $\alpha \in \mathbb{R}$

ii) $(\frac{d^2}{dx^2} + \alpha^2)Y(x)sin(\alpha x)$, *pour* $\alpha \in \mathbb{R}^*$

Exercice 5 1. *Calculer le laplacien, noté* $\Delta(\frac{1}{\mathbf{r}})$, *de la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}^3/\{0\}$ *par* $f(x,y,z) = \frac{1}{\mathbf{r}}$, *avec* $\mathbf{r} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

2. *Pour* $\varepsilon > 0$, *on note* f_ε *la fonction:* $f_\varepsilon(x,y,z) = f(x,y,z)$ *si* $\mathbf{r} > \varepsilon$ *et* 0 *sinon. Calculer* ΔT_{f_ε}.

3. *En déduire que*

$$-\Delta(\frac{1}{4\pi\mathbf{r}}) = \delta$$

Exercice 6 *Soit* S *et* T *deux distributions de* $\mathcal{D}'_+$. *Montrer que*

1. $x(S \star T) = (xS) \star T + S \star (xT)$

2. $(e^{\alpha x}S) \star (e^{\alpha x}T) = e^{\alpha x}(S \star T)$

Exercice 7 *Calculer les inverses de convolution dans l'algèbre* $\mathcal{D}'_+$ *des distributions suivantes*

1. $\delta'' - 5\delta' + 6\delta$

2. $T_{Y(x)e^x} + \delta'$

3. $\delta'' - T_Y$

Exercice 8 *Soit* φ_a *la fonction caractéristique de l'intervalle* $[-a;a]$, $(a > 0)$. *Résoudre dans* $\mathcal{D}'_+$ *l'équation différentielle* $X'' + \omega^2 X = T_{\varphi_a}$, *avec* $\omega \neq 0$. *On admet ici que l'inverse de convolution de* $\delta'' + \omega^2\delta$ *est donné par*

$$(\delta'' + \omega^2\delta)^{*-1} = T_{Y(t)\frac{\sin(\omega t)}{\omega}}$$

Exercice 9 *Montrer que les fonctions suivantes définissent des distributions tempérées et calculer leurs transformées de Fourier dans* $\mathcal{S}'$

1. $f(x) = x^n$, *avec* $n \in \mathbb{N}$

2. $f(x) = e^{2i\pi ax}$, $a \in \mathbb{R}$

3. $f(x) = \cos(2\pi ax)$, $a \in \mathbb{R}$

4. $f(x) = \sin(2\pi ax)$, $a \in \mathbb{R}$

5. $f(x) = \cos^2(2\pi ax)$, $a \in \mathbb{R}$

6. $f(x) = Y(-x)$

7. $f(x) = Y(x)e^{2i\pi ax}$

8. $f(x) = Y(x)\cos(2\pi ax)$

Exercice 10 *1. Montrer que, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}$, on a*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(\frac{n}{a}) = a \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}(\varphi)(na), \quad a \neq 0.$$

2. Montrer, comme application, que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi \frac{n^2}{x}}.$$

Exercice 11 *On considère la suite de distributions $(T_n)_n$ définie par*

$$T_1 = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{-1})$$
$$T_{n+1} = T_n \star T_1, \quad \text{pour } n \geq 1$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a

$$T_n = \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{n} C_n^p \delta_{2p-n}$$

2. En déduire la transformée de Fourier réciproque de T_n.

3. Déterminer $\mathcal{F}(T_{\cos^n(2\pi x)})$.